Praktikum
Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 für Lehramtsstudierende
WS 2011/2012

Blatt 8

21. November 2011

(1) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der Geraden (in $\mathbb{R}^2$) durch $(0,0)$ und $(-2,4)$.

(2) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(a,7a)\,|\,a\in\mathbb{R}\}$ (das ist der Graph der Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ a\longmapsto 7a$) eine Gerade durch $(0,0)$ ist. Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form davon.

(3) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der Geraden (in $\mathbb{R}^3$) durch $(0,0,0)$ und $(3,1,2)$.

(4) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(a,-a,5a)\,|\,a\in\mathbb{R}\}$ (das ist der Graph der Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ a\longmapsto(-a,5a)$) eine Gerade durch $(0,0,0)$ ist. Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form davon.

(5) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der zur Geraden in (1) parallelen Geraden durch $(1,1)$.

(6) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(a,7a-4)\,|\,a\in\mathbb{R}\}$ (das ist der Graph der Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ a\longmapsto 7a-4$) eine zur Geraden in (2) parallele Gerade ist. Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form davon.

(7) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der zur Geraden in (3) parallelen Geraden durch $(2,0,-1)$.

(8) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(a,-a+1,5a+2)\,|\,a\in\mathbb{R}\}$ (das ist der Graph der Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ a\longmapsto(-a+1,5a+2)$) eine zur Geraden in (4) parallele Gerade ist. Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form davon.

(9) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der Geraden (in $\mathbb{R}^2$) durch $(4,1)$ und $(-2,4)$.

(10) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der Geraden (in $\mathbb{R}^3$) durch $(1,2,3)$ und $(3,1,2)$.

(11) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der Ebene (in $\mathbb{R}^3$), auf der die Punkte $(0,0,0)$, $(-1,0,3)$ und $(1,2,1)$ liegen.

(12) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(a,b,2a+3b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ (das ist der Graph der Funktion $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ (a,b)\longmapsto(a,b,2a+3b)$) eine Ebene durch $(0,0,0)$ ist. Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form davon.

(13) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der zur Ebene in (11) parallelen Ebene durch $(4, 0, 1)$.

(14) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(a, b, 2a + 3b - 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ (das ist der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \longmapsto (a, b, 2a + 3b - 1)$) eine zur Ebene in (12) parallele Ebene ist. Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form davon.

(15) Berechnen Sie eine Parameterform und eine implizite Form der Ebene (in $\mathbb{R}^3$), auf der die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ liegen.

(16) Für $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0) \neq (b_1, b_2, b_3)$ sei
$U := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \}$ und
$V := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \}$.
U und V sind *Untervektorräume* von $\mathbb{R}^3$.
Es seien $c, d \in \mathbb{R}$,
$E := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \}$ und
$F := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d \}$.
E bzw. F ist der zu U bzw. V parallele *affine Unterraum* von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}}(U)$, $\dim_{\mathbb{R}}(V)$, $\dim_{\mathbb{R}}(E)$, $\dim_{\mathbb{R}}(F)$.
Was bedeutet das geometrisch?

(b) Wie lassen sich der Untervektorraum $W := U \cap V$ von $\mathbb{R}^3$ und der affine Unterraum $G := E \cap F$ von $\mathbb{R}^3$ als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (also in *impliziter Form*) beschreiben?

(c) Welche Beziehung besteht zwischen dem Untervektorraum W und dem affinen Unterraum G?

(d) Finden Sie eine implizite Form *und* eine Parameterform von $W = U \cap V$ und von $G = E \cap F$ für die folgenden Fälle:

- $(a_1, a_2, a_3) = (3, -4, 2)$, $(b_1, b_2, b_3) = (6, -8, 4)$, $c = 1$, $d = 2$
- $(a_1, a_2, a_3) = (3, -4, 2)$, $(b_1, b_2, b_3) = (6, -8, 4)$, $c = 1$, $d = 3$
- $(a_1, a_2, a_3) = (3, -4, 2)$, $(b_1, b_2, b_3) = (6, -8, 5)$, $c = 1$, $d = 3$.

(e) Bestimmen Sie für die in (d) angegebenen Fälle jeweils $\dim_{\mathbb{R}}(W)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(G)$ und überlegen Sie, was das geometrisch bedeutet!

(17) $G = \{ p + su \mid s \in \mathbb{R} \}$ und $H = \{ q + tv \mid t \in \mathbb{R} \}$ seien die Geraden in $\mathbb{R}^3$ mit
$p = (5, 1, 1)$, $q = (-5, -4, -6)$, $u = (1, 1, 1)$, $v = (9, 4, 6)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Geraden G und H genau einen Schnittpunkt $r \in \mathbb{R}^3$ haben und bestimmen Sie r!

(b) Aus (a) folgt, daß die Geraden G und H eine eindeutig bestimmte Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ aufspannen. Berechnen Sie eine *Parameterform* der Ebene E!

(c) Finden Sie eine *implizite Form* der Ebene E, also $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ so, daß $E = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \}$ ist.