Praktikum
Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 für Lehramtsstudierende WS 2011/2012

Blatt 7

14. November 2011

(1) Berechnen Sie $L(A,b)$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(2) Stellen Sie fest, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die dazu inversen Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 3,2 \\ 0,9 & 1,4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{4} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

(3) Lösen Sie die Systeme linearer Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} 2a+b & = & 1 \\ -a+\frac{1}{2}b & = & 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} 7a+3,2b & = & 2,1 \\ 0,9a+1,4b & = & 0,5 \end{array}.$$

(4) Stellen Sie fest, ob die Matrix A invertierbar ist. Wenn ja, berechnen Sie A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) (a) Verwandeln Sie jede der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix in Stufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 16 & 9 & 4 & 1 \\ 64 & 27 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie
- eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(A,0) \le \mathbb{Q}^{3\times 1}$ des homogenen Systems $Ax=0$
- eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(B,0) \le \mathbb{Q}^{4\times 1}$ des homogenen Systems $Bx=0$
- eine $\mathbb{Q}$-Basis des Lösungsraumes $L(C,0) \le \mathbb{Q}^{5\times 1}$ des homogenen Systems $Cx=0$.

Wie sehen diese Gleichungssysteme aus, wenn man sie *ohne Verwendung von Matrizen* anschreibt?

(6) A sei die Matrix aus der vorigen Aufgabe und $b, c, d \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ seien die Spalten

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie mit Hilfe der Ergebnisse oben eine Darstellung der Lösungsmenge
des Gleichungssystems $Ax = b$
des Gleichungssystems $Ax = c$
des Gleichungssystems $Ax = d$.

(7) Testen Sie, ob

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

invertierbar ist und - falls ja - berechnen Sie die zu M inverse Matrix $M^{-1} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$!

(8) $\mathbb{Z}_3$ sei die Menge $\{0, 1, 2\}$ mit der Addition $+ : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ und der Multiplikation $\cdot : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$, welche folgendermaßen definiert sind:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Das bedeutet beispielsweise $1+1 = 2$, $1+2 = 0$, $2+1 = 0$, $2+2 = 1$ u.s.w.

(a) Zeigen Sie:

- $\mathbb{Z}_3$ ist mit dieser Addition und mit dieser Multiplikation ein *Körper* mit dem Nullelement 0 und dem Einselement 1.
- Im Körper $\mathbb{Z}_3$ ist $-1 = 2$, $-2 = 1$ und $2^{-1} = 2$.

(b) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_3)^{3\times 4}.$$

(c) Wie viele Elemente haben die $\mathbb{Z}_3$-Vektorräume $(\mathbb{Z}_3)^{4\times 1}$ und $L(A, 0)$?