Praktikum
Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 für Lehramtsstudierende
WS 2011/2012

Blatt 5

31. Oktober 2011

(1) Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ Untervektorräume sind. Wenn ja, geben Sie eine Basis davon an.

- $\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A^2 = 0\}$
- $\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{12} = A_{13}\}$
- $\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{11} = A_{22} = A_{23} = 0\}$
- $\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{11}^2 = 0\}$
- $\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{33}^2 - A_{13}^2 = 0\}$
- $\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{12} = A_{21},\, A_{13} = A_{31},\, A_{23} = A_{32}\}$
- $\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{12} = -A_{21},\, A_{13} = -A_{31},\, A_{23} = -A_{32}\}$

(2) Schreiben Sie die folgenden Produkte von Matrizen mit Spalten als Linearkombination der Spalten der Matrix an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(3) Schreiben Sie die folgenden Produkte von Zeilen mit Matrizen als Linearkombination der Zeilen der Matrix an.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(4) (a) Welche der folgenden rationalen Matrizen sind *Matrizen in Stufenform*?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

(b) Markieren Sie für jede Matrix in (a), welche eine Matrix in Stufenform ist, alle *Pivots* und alle *Pivot-Spalten* und bestimmen Sie jeweils
- die Anzahl der Pivot-Spalten und die Anzahl der Nicht-Pivot-Spalten
- die Spaltenindizes der Pivot-Spalten
- die Spaltenindizes der Nicht-Pivot-Spalten.

(5) (a) Schreiben Sie die folgenden Systeme linearer Gleichungen mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{Q}$ in der Form $Ax = 0$ resp. $Ax = b$ mit passender Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und passender Spalte $b \in \mathbb{Q}^{m\times 1}$ an! Hat die Matrix A Stufenform?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 7 \\ x_2 + 3x_4 &= 6 \\ x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_4 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_4 &= -4 \\ x_3 - 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_5 + 5x_6 &= 0 \\ x_3 + 3x_5 - 6x_6 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 + 7x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_5 + 5x_6 &= 9 \\ x_3 + 3x_5 - 6x_6 &= 8 \\ x_4 - 2x_5 + 7x_6 &= 7 \end{aligned}$$

(b) Schreiben Sie für jedes der *homogenen* Systeme linearer Gleichungen aus (a), das Stufenform hat, eine $\mathbb{Q}$-Basis der Lösungsmenge $L(A, 0)$ von $Ax = 0$ an.

(c) Schreiben Sie für jedes der *inhomogenen* Systeme linearer Gleichungen aus (a), das Stufenform hat, irgendeine Lösung von $Ax = b$ sowie eine „gute“ Beschreibung (durch endlich viele Daten) der Lösungsmenge $L(A, b)$ an.