Praktikum
Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 für Lehramtsstudierende
WS 2011/2012

Blatt 4

24. Oktober 2011

(1) Aus: Tinhof et al.: Mathematik II, Trauner Verlag, Linz 2009 (Schulbuch für den 2. Jahrgang von Handelsakademien, Aufgabe 9.006)

$$\begin{pmatrix} -6 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -8 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix} =$$

(2) Aus: Tinhof et al.: Mathematik II, Trauner Verlag, Linz 2009 (Schulbuch für den 2. Jahrgang von Handelsakademien, Aufgabe 9.008)

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

(3) (a) Welche der folgenden Matrizen A, B, C, D, E, F mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ können miteinander multipliziert werden – und in welcher Reihenfolge?

(b) Berechnen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen A, B, C, D, E, F!

Dabei sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -2 & 4/3 \\ 4 & -8/3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Aus: Tinhof et al.: Mathematik II, Trauner Verlag, Linz 2009 (Schulbuch für den 2. Jahrgang von Handelsakademien, Aufgabe 9.018)
In einem Ort konkurrieren zwei Bio-Lebensmittelhändler um die Gunst der Kunden.
Ein Preisvergleich ergab folgende Einzelpreise:
Preise bei Kaufmann A: 1 Semmel 0,20; 1 Ei 0,28; 1 kg Butter 8,80; 1 kg Käse 13,00.
Preise bei Kaufmann B: 1 Semmel 0,18; 1 Ei 0,29; 1 kg Butter 8,40; 1 kg Käse 16,00.
Zwei Kunden haben täglich folgenden Bedarf:
Kunde Mayer: 6 Semmeln; 6 Eier; 0,25 kg Butter; 0,3 kg Käse.
Kunde Huber: 10 Semmeln; 3 Eier; 0,50 kg Butter; 0,1 kg Käse.
Welcher Kunde kauft bei welchem Händler am billigsten? Führen Sie die Rechnung in Matrixform aus und achten Sie auf die richtige Verkettung.
Geben Sie das Ergebnis als Matrix an.
Wo sollte Kunde Huber einkaufen? Wo sollte Kunde Mayer einkaufen?

(5) A und B seien rationale 4×4-Matrizen. Überlegen Sie, welche der folgenden Behauptungen richtig sind. Wie könnte man mit möglichst wenig Aufwand die falschen Behauptungen richtig stellen?

- Der Eintrag von $A \cdot B$ in der r-ten Zeile und s-ten Spalte $(1 \leq r, s \leq 4)$ ist $\sum_{t=1}^{4} B_{ts} A_{rt}$.
- Der Eintrag von $A \cdot B$ in der r-ten Zeile und s-ten Spalte $(1 \leq r, s \leq 4)$ ist $\sum_{i=1}^{4} A_{is} B_{it}$.
- Der Eintrag von $A \cdot B$ in der k-ten Zeile und ℓ-ten Spalte $(1 \leq k, \ell \leq 4)$ ist $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} A_{ki} B_{j\ell}$.
- Der Eintrag von $A \cdot B$ in der k-ten Zeile und ℓ-ten Spalte $(1 \leq k, \ell \leq 4)$ ist $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} A_{ik} B_{\ell j}$.

(6) A und B seien rationale 4×4-Matrizen. Wie schreibt man den Eintrag von $A \cdot B$ und von $B \cdot A$ in der i-ten Zeile und j-ten Spalte an?

(7) A, P, Q, R seien die folgenden Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrizen PA, AP, QA, AQ, RA, AR und vergleichen Sie jede dieser Matrizen mit der ursprünglichen Matrix A!

Wie nennt man Matrizen vom Typ der Matrix P resp. Q resp. R?

(8) Berechnen Sie für die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

sukzessive alle Potenzen $A^p \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ und überlegen Sie, welche Gestalt diese Potenzen haben!

Erinnerung:
Es ist $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA = A^2 A$ u.s.w.

(9) $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n\times n}$ sei eine quadratische Matrix über einem beliebigen Körper K mit der Eigenschaft

$(*)$ $A_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $1 \leq j < i + 1$.

Zeigen Sie:

(a) Für $p = 1, 2, 3 \ldots$ hat die p-te Potenz $A^p = ((A^p)_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n\times n}$ der Matrix A die Eigenschaft

$(**)$ $(A^p)_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $1 \leq j < i + p$.

(b) Für alle $p \geq n$ ist $A^p \in K^{n\times n}$ die Nullmatrix.

Was bedeutet $(**)$ für die Gestalt der Matrix A^p, falls $n = 4$ und $p = 1, 2, 3, 4$ ist?