Praktikum
Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 für Lehramtsstudierende
WS 2011/2012

Blatt 3

17. Oktober 2011

(1) Berechnen Sie für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ die eindeutig bestimmten Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{Z}$ mit

- $a = bm + r$
- $0 \leq r < |b|$:

$a = +18$ und $b = +7$
$a = +18$ und $b = -7$
$a = -18$ und $b = +7$
$a = -18$ und $b = -7$
$a = +465$ und $b = +11$
$a = +465$ und $b = -11$
$a = -465$ und $b = +11$
$a = -465$ und $b = -11$.

(2) Bestimmen Sie für $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ die *Zifferndarstellung von a zur Basis b*, also die eindeutig bestimmten Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $z_0, z_1, \ldots z_n \in \mathbb{N}$ mit

- $a = z_0 b^0 + z_1 b^1 + \ldots + z_n b^n$
- $0 \leq z_0, z_1, \ldots, z_n < b$
- $z_n \neq 0$:

$a = 6317$ und $b = 2$
$a = 6317$ und $b = 5$
$a = 6317$ und $b = 7$
$a = 6317$ und $b = 10$
$a = 6317$ und $b = 12$
$a = 6317$ und $b = 16$.

(3) Es seien a und b Elemente eines kommutativen Ringes. Überprüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig sind. Überlegen Sie dabei, welche Rechenregeln Sie verwenden.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) + b^2 = a(a+b) - (a-b)b + b^2 .$$

(4) Berechnen Sie im Kopf $131^2 - 129^2$ und $102^2 - 98^2$.

(5) Es sei $I := \{-3, -2, 0, 2, 3\}$. Stellen Sie mit Hilfe von $\sum$ und $\prod$ die Zahlen dar, die man wie folgt erhält:

a) Zu jedem Element von I wird drei addiert, diese Summe wird dann quadriert und mit zwei multipliziert. Dann werden diese Zahlen zusammengezählt.

b) Von jedem Element in I wird 1 subtrahiert, jede dieser (neuen) Zahlen wird mit vier multipliziert. Schließlich wird von diesen Zahlen das Produkt gebildet.

Berechnen Sie diese zwei Zahlen und beschreiben Sie genau, was Sie dabei tun!

(6) Sei $J := \{2, 3, 4, 5\}$. Die Funktionen f und g von J nach $\mathbb{Q}$ seien durch

$$f(j) := 2j^2 + j - 1, \; g(j) := j^2 + j + 2, \; (\text{für alle } j \in J),$$

definiert.
Berechnen Sie $\sum_{j \in J} f(j)$, $\prod_{j \in J} f(j)$, $\sum_{j \in J} g(j)$ und $\prod_{j \in J} g(j)$.

(7) Es seien p und q positive ganze Zahlen. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{q} (3k - 3\ell - 1) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{p} (4k + \ell)(3\ell - 2k).$$

(8) Es sei

$$A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq 5} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{51} & \dots & A_{55} \end{pmatrix}$$

eine 5×5-Matrix mit Elementen in einem Körper K.

Überlegen Sie, welche Einträge der Matrix A im Folgenden summiert werden:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} A_{ij}$ (b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{5} A_{ij}$ (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} A_{ii}$ (d) $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq 5} A_{ij}$

(e) $\displaystyle\sum_{(i,j) \in \{1,3,5\} \times \{2,4\}} A_{ij}$ (f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=i}^{5} A_{ij}$ (g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{j} A_{ij}$ (h) $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq 5} A_{ij}$

(i) $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq 5} A_{ij}$ (j) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=i+1}^{5} A_{ij}$ (k) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{j-1} A_{ij}$ (l) $\displaystyle\sum_{1 \leq i = j \leq 5} A_{ij}$.

(9) Berechnen Sie diese Summen für die Matrix 5×5-Matrix A mit
$A_{ij} := i + j$, $1 \leq i, j \leq 5$.