Praktikum
Lineare Algebra und analytische Geometrie 1
für Lehramtsstudierende
WS 2011/2012

Blatt 2

10. Oktober 2011

(1) Für zwei rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ definieren wir $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} :\Leftrightarrow ad \leq bc$.
Ordnen Sie die folgenden rationalen Zahlen der Größe nach.
5/11, 6/11, 6/13, 7/13, 8/17, 11/23

(2) Überprüfen Sie, ob die folgenden zwei rationalen Zahlen gleich sind. Wenn nein, welche ist größer?

$$\frac{7649131}{5327021022}, \frac{70337}{48984215}$$

(3) Mit a und b bezeichnen wir ganze Zahlen, wobei $1 \neq b \neq 0$ ist.
Ergänzen Sie den folgenden Satz: Genau dann ist

$$\frac{a+1}{b} = \frac{a}{b-1}, \quad \text{wenn} \quad \ldots\ldots = 1 \quad \text{ist} .$$

(4) Berechnen Sie Zähler und Nenner der rationalen Zahlen

$$\frac{\frac{23}{11} - (\frac{72}{19} - \frac{29}{33})}{54} - (\frac{15}{9} \cdot \frac{43}{41}) \quad \text{und} \quad \frac{\frac{43}{12} + (\frac{54}{37} - \frac{30}{41})}{\frac{3}{5}} - (\frac{4}{81} \cdot \frac{9}{20}) .$$

(5) Schreiben Sie die Summen

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{n+2} \quad \text{und} \quad \sum_{j=3}^{6} \frac{1+j}{j^2}$$

ohne Verwendung des Summenzeichens an und berechnen Sie dann Zähler und Nenner dieser Zahlen!

(6) (a) Schreiben Sie die Summen

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

ohne Verwendung des Summenzeichens an!

(b) Zeigen Sie, daß für alle $k \geq 1$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

ist .

(c) Berechnen Sie mittels (b) die zwei Summen aus (a)!

(d) Berechnen Sie für ein *beliebiges* $n \geq 1$ die Summen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} .$$

(7) Schreiben Sie die folgenden Summen ohne Verwendung des Summenzeichens an und berechnen Sie diese Summen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=0}^{2} (2i)(2j+1) \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{j=0}^{2} \sum_{i=1}^{4} (2i)(2j+1)$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{(i,j)\in\{1,2,3,4\}\times\{0,1,2\}} (2i)(2j+1) \qquad\qquad \text{(d)} \quad \left(\sum_{i=1}^{4} 2i\right)\left(\sum_{j=0}^{2} (2j+1)\right) .$$

(8) Mit A und B bezeichnen wir zwei Aussagen. Überprüfen Sie mit Wahrheitswerttabellen, ob die folgenden Aussagen immer wahr sind.

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \Rightarrow (\neg B))$

(9) Zeigen Sie durch *vollständige Induktion*:
(a) $2n+1 < 2^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$
(b) $n^2 < 2^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$.
Was gilt in (a) für $n = 0, 1, 2$ und in (b) für $n = 0, 1, 2, 3, 4$?

(10) Zeigen Sie durch *vollständige Induktion*, daß für jede Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq 1$ und jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Was bedeutet das für $q = 2$?

(11) Was stimmt hier nicht? Jemand behauptet: „In jedem Weinkeller gibt es nur Rotweinflaschen oder nur Weißweinflaschen“ und beweist seine Aussage durch vollständige Induktion über die Anzahl n der Weinflaschen in einem Keller.
Wenn $n = 1$ ist, dann ist diese eine Flasche entweder eine Rot- oder Weißweinflasche, aber nicht beides. Also stimmt die Behauptung in diesem Fall.
Wenn $n > 1$ ist, geben wir eine Flasche beiseite, nach Induktionsannahme enthalten die verbleibenden $n - 1$ Flaschen entweder alle Rotwein oder alle Weißwein. Was ist mit der weggenommenen Flasche? Wenn wir eine andere Flasche wegnehmen und jene dazunehmen, haben wir wieder $n - 1$ Flaschen, die nach Induktionsannahme alle Wein gleicher Farbe enthalten. Also muss die zuerst weggenommene Flasche denselben Wein enthalten wie die anderen. Damit ist die Aussage bewiesen.