Praktikum
Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 für Lehramtsstudierende
WS 2011/2012

Blatt 14

30. Jänner 2012

(1) Es seien
$f = 10\,x^5 - 14\,x^4 + 62\,x^3 - 37\,x^2 + 85\,x + 50 \in \mathbb{Q}[x]$ und
$g = \;\; 5\,x^3 - \;\; 7\,x^2 + 11\,x \;+\; 6 \in \mathbb{Q}[x]$.

Berechnen Sie die eindeutig bestimmten Polynome $h \in \mathbb{Q}[x]$ und $r \in \mathbb{Q}[x]$ mit den Eigenschaften
- $f = g\,h + r$
- $r = 0$ oder $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

(2) Zeigen Sie, dass -5 eine Nullstelle des Polynoms $f := x^3 + 4\,x^2 - 11\,x - 30$ ist. Berechnen Sie dann alle anderen Nullstellen von f.

(3) Zeigen Sie, dass $-\frac{2}{3}$ eine Nullstelle des Polynoms $g := x^3 + \frac{19}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - 1$ ist. Berechnen Sie dann alle anderen Nullstellen von g.

(4) Zeigen Sie, dass 6 ein Eigenwert der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Berechnen Sie dann alle anderen Eigenwerte und alle Eigenräume dieser Matrix.

(5) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:
$(3 + 4i)(5 - 6i)$
$(2 - i)^2 + (4 + 2i)$
$(2 + 3i)/(1 - 4i)$
$(3i - 5)^{-1}$
$\frac{1}{2-i} + \frac{i-1}{3+2i}$.

(6) Beschreiben Sie die Lösungsmenge (in $\mathbb{C}^2$) der Gleichung $(2-i)x+(1+3i)y=1+i$.

(7) Beschreiben Sie die Lösungsmenge (in $\mathbb{C}^3$) der Gleichung $(1+i)x+(2-i)y-iz=3+i$.

(8) Lösen Sie das System linearer Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 3+2i & 1+4i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

(9) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen, deren Quadrat $1+i$ ist.

(10) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen a mit der Eigenschaft $a^2+(2+i)a+1-i=0$.