Praktikum
Lineare Algebra und analytische Geometrie 1 für Lehramtsstudierende
WS 2011/2012

Blatt 11

12. Dezember 2011

Die Aufgaben 3 - 10 sind Wiederholungen aus den Blättern 3 - 10.

In den folgenden Aufgaben betrachten wir das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(1) Berechnen Sie alle Winkel eines Dreiecks mit den Seitenlängen $2, 3$ und 4.

(2) Die Winkel eines Dreiecks sind $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{8}$ und die Länge der dem Winkel $\frac{5\pi}{8}$ gegenüberliegende Seite ist 2. Berechnen Sie die andern zwei Seitenlängen.

(3) Berechnen Sie mit dem Schmidt'schen ON-Verfahren eine ON-Basis der Ebene durch die Punkte $(0,0,0)$, $(2,-2,1)$, $(-2,1,2) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Koordinaten von $3(2,-2,1)-(-2,1,2)$ bezüglich der berechneten ON-Basis.

(4) Berechnen Sie einen Punkt der Ebene durch die Punkte $(0,0,0)$, $(2,-2,1)$, $(-2,1,2) \in \mathbb{R}^3$, der von $(1,0,0)$ einen möglichst geringen Abstand hat. Lösen Sie diese Aufgabe auf 2 Arten: zuerst, indem Sie die vorhin berechnete ON-Basis der Ebene benutzen, und dann, indem Sie zuerst die auf der Ebene normal stehende Gerade berechnen.

(5) Zwei Kräfte, die im selben Punkt angreifen, schließen den Winkel $\frac{\pi}{3}$ ein. Die Beträge der Kräfte sind 2 und 3. Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft.

(6) Berechnen Sie ein Tripel (a,b,c) so, dass $\|(a,b,c)\| = 3$ und der Winkel zwischen $\mathbb{R}_{\geq 0}(2,0,0)$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}(a,b,c)$ gleich $\frac{\pi}{3}$ ist. Berechnen Sie den Betrag von $(a,b,c) + (2,0,0)$.

(7) Für $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $(a_1,a_2,a_3) \neq (0,0,0) \neq (b_1,b_2,b_3)$ sei
$U := \{\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \;=\; 0 \,\}$ und
$V := \{\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \;=\; 0 \,\}$.
U und V sind *Untervektorräume* von $\mathbb{R}^3$.
Es seien $c, d \in \mathbb{R}$,
$E := \{\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \;=\; c \,\}$ und
$F := \{\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \;=\; d \,\}$.
E bzw. F ist der zu U bzw. V parallele *affine Unterraum* von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}}(U)$, $\dim_{\mathbb{R}}(V)$, $\dim_{\mathbb{R}}(E)$, $\dim_{\mathbb{R}}(F)$.
Was bedeutet das geometrisch?

(b) Wie lassen sich der Untervektorraum $W := U \cap V$ von $\mathbb{R}^3$ und der affine Unterraum $G := E \cap F$ von $\mathbb{R}^3$ als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (also in *impliziter Form*) beschreiben?

(c) Welche Beziehung besteht zwischen dem Untervektorraum W und dem affinen Unterraum G?

(d) Finden Sie eine implizite Form *und* eine Parameterform von $W = U \cap V$ und von $G = E \cap F$ für

$(a_1, a_2, a_3) = (3, -4, 2), \ (b_1, b_2, b_3) = (6, -8, 4), \ c = 1, \ d = 2$

(e) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(W)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(G)$ und überlegen Sie, was das geometrisch bedeutet!

(8) Es sei

$$A = (A_{ij})_{1 \le i,j \le 5} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{51} & \dots & A_{55} \end{pmatrix}$$

eine 5×5-Matrix mit Elementen in einem Körper K.

Überlegen Sie, welche Einträge der Matrix A im Folgenden summiert werden:

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} A_{ij} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{5} A_{ij} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{i=1}^{5} A_{ii}$$

$$\text{(d)} \quad \sum_{(i,j) \in \{1,3,5\} \times \{2,4\}} A_{ij} \qquad \text{(e)} \quad \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=i+1}^{5} A_{ij} \qquad \text{(f)} \quad \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{j-1} A_{ij} \, .$$

(9) A, P, Q, R seien die folgenden Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrizen PA, AP, QA, AQ, RA, AR und vergleichen Sie jede dieser Matrizen mit der ursprünglichen Matrix A!

Wie nennt man Matrizen vom Typ der Matrix P resp. Q resp. R?

(10) A und B seien die folgenden rationalen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Gibt es Matrizen $X \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ und $Y \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ mit $XA = B$ und $AY = B$?
- Finden Sie gegebenenfalls Matrizen X und Y mit $XA = B$ und $AY = B$!

Anleitung:
Untersuchen Sie zuerst, ob die Matrix A *invertierbar* ist und berechnen Sie falls möglich die zu A inverse Matrix!