```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

Aufgabe 42

Die Dimension eines Vektorraums ist die Anzahl der Vektoren einer (und damit jeder) Basis dieses Vektorraums. Der Rang einer Matrix ist die Dimension ihres Spaltenraums, also des Vektorraums, der von den Spalten dieser Matrix erzeugt wird. Die Dimension des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Systems linearer Gleichungen ist: Anzahl der Spalten der Matrix minus Rang der Matrix.

```
> A:=
  Matrix(4,6,[1,-1,3,0,0,1,2,1,-2,2,-1,2,3,0,1,2,-1,3,-1,1,-3,0,0,
  -1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix in Stufenform enthält 2 Pivots, also ist ihr Rang (und auch der von A) gleich 2. Die Dimension von L(A,0) ist daher 6-2 = 4. Eine Basis von L(A,0) ist

```
> NullSpace(A);
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

Aufgabe 43

Die Koordinatenspalte eines Vektors w bezüglich einer Basis (v_1, ... , v_n) ist die eindeutig bestimmte Spalte mit den Einträgen c_1, ... , c_n, so, dass w = c_1.v_1 + ... + c_n.v_n ist.

Das Paar ((3,2), (-3,1)) von Vektoren in **Q**^2 ist genau dann eine Basis, wenn jedes Paar b: = (s,t) in **Q**^2 auf genau eine Weise als Linearkombination von (3,2) und (-3,1) geschrieben werden kann. Das ist genau dann der Fall, wenn das System linearer Gleichungen Ax = b für alle b genau eine Lösung hat, dh. wenn A invertierbar ist. Dabei ist

```
> A:= Matrix(2,2,[3,-3,2,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A ist also invertierbar.

```
> A^(-1);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

```
> A^(-1).Vector(<1,1>);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Daher ist (1,1) = (4/9).(3,2) + (1/9).(-3,1).

```
> A^(-1).Vector(<1,3>);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

Daher ist (0,3) = (10/9).(3,2) + (7/9).(-3,1).

```
> A^(-1).Vector(<2,3>);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{9} \\ \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

Daher ist (2,3) = (11/9).(3,2)+ (5/9).(-3,1).

Schließlich suchen wir die Koordinatenspalte der Standardmatrix E_11 bezüglich der angegebenen Basis, also Zahlen a,b,c,d so, dass
a-b = 1, 2a+c=0, b + d = 0, 2c+d =0 ist. Wir stellen dieses System linearer Gleichungen in Matrizenform dar:

```
> M:= Matrix(4,4, [1,-1,0,0,2,0,1,0,0,1,0,1,0,0,2,1]); M^(-1);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

```
> u11:=Vector(<1,0,0,0>);
```

$$u11 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(<M|u11>);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Die fünfte Spalte dieser Matrix ist die Koordinatenspalte von E_11 bezüglich der gegebenen Basis.
Analog für E_12 , E_21 , E_22:

```
> ReducedRowEchelonForm(<M|Vector(<0,1,0,0>)>);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(<M|Vector(<0,0,1,0>)>);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(<M|Vector(<0,0,0,1>)>);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

Aufgabe 44

Wenn das k-Tupel von Vektoren ein Erzeugendensystem bzw. linear unabhängig bzw. eine Basis ist, dann muss k >= n bzw. k <= n bzw. k=n sein. Nach Satz 104 schreiben wir die angegebenen k-Tupel als Matrix mit 3 Zeilen und k Spalten an und formen diese elementar in Stufenform um. Das angegebene k-Tupel ist eine Basis, wenn die Matrix in Stufenform die Einheitsmatrix ist, ist ein Erzeugendensystem, wenn es drei Pivots gibt und linear unabhängig, wenn es k Pivots gibt.

```
> A:= Matrix(2,5,[1,1,2,1,0,0,1,1,-1,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Spalten von A sind nicht linear unabhängig, aber ein Erzeugendensystem von **Q**^2 , die erste und zweite Spalte von A bilden eine Basis von **Q**^2 .

```
> B:= Matrix(3,3,[1,0,0,1,1, 0,3,0,0]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Spalten von B bilden keine Basis von **Q**^3, die ersten zwei sind linear unabhängig.

```
> ReducedRowEchelonForm(<B|IdentityMatrix(3)>);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Die ersten zwei Spalten von B können durch (1,0,0) (als Spalte geschrieben) zu einer Basis von **Q**

^3 ergänzt werden.

```
> C:= Matrix(3,3,[1,0,2,1,1,4,-2,0,-4]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(C);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Spalten von C sind weder linear unabhängig, noch ein Erzeugendensystem von **Q**^3.

```
> ReducedRowEchelonForm(<C|IdentityMatrix(3)>);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Die ersten zwei Spalten von C können durch (1,0,0) (als Spalte geschrieben) zu einer Basis von **Q** ^3 ergänzt werden.

```
> F:= Matrix(2,4,[4,0,-7,3,8,0,-14,6]);
```

$$F := \begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 \\ 8 & 0 & -14 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(F);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Spalten von F sind weder linear unabhängig, noch ein Erzeugendensystem von **Q**^2.