Lösung von Aufgabe 59

Wir können annehmen, dass $\|b\| = \|p_1\| = 1 = \|p_2\|$ ist. Dann ist $(b, \frac{v}{\|v\|})$ eine ON-Basis der Ebene. Wir fassen die Vektoren in V und ihre Koordinatenspalten bezüglich dieser ON-Basis als gleich auf. Dann ist

$$p_1 = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ \|v\| \end{pmatrix} .$$

Wir suchen reelle Zahlen c_1 und c_2 so, dass $c_1 p_1 + c_2 p_2 = v$ ist, das heißt:

$$\begin{pmatrix} -\cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \|v\| \end{pmatrix} .$$

Als Lösung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\|v\| \cdot \cos(\alpha_2)}{-\cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_2)\sin(\alpha_1)} \\ \\ \frac{-\|v\| \cdot \cos(\alpha_1)}{-\cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_2)\sin(\alpha_1)} \end{pmatrix} .$$

Wenn $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$ und $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, ist

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\|v\|}{2\sin(\alpha)} \\ \\ \frac{\|v\|}{2\sin(\alpha)} \end{pmatrix} .$$

Daher ist $\|u_1\| = \|c_1 p_1\| = |c_1| = \frac{\|v\|}{2\sin(\alpha)}$. Somit ist $\|u_1\| \geq \|v\|$ genau dann, wenn $1 \geq 2\sin(\alpha)$ ist, das heißt: $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{6}$.