Lösung von Aufgabe 50

Wie im Hinweis nehmen wir an, dass $a = 0$ ist und (b, c) eine Basis von V ist.

Dann ist
$A = \mathbb{R}u$ mit $u \neq 0$ und $\langle u, b - c\rangle = 0$,
$B = b + \mathbb{R}v$ mit $v \neq 0$ und $\langle v, c\rangle = 0$ und
$C = c + \mathbb{R}w$ mit $w \neq 0$ und $\langle v, b\rangle = 0$.

Die Vektoren u und v sind linear unabhängig, also insbesondere eine Basis von V. Denn: Wären sie linear abhängig, dann gäbe es (wegen $u \neq 0$ und $v \neq 0$) eine Zahl $z \neq 0$ mit $u = zv$. Dann wäre

$$0 = \langle u, b - c\rangle = \langle zv, b - c\rangle = z\langle v, b\rangle\,,$$

also $\langle v, b\rangle = 0$. Dann ist aber für alle reellen Zahlen β, γ auch $\langle v, \beta b + \gamma c\rangle = 0$. Da (b, c) eine Basis ist, wäre dann auch $\langle v, v\rangle = 0$, Widerspruch.

Wir berechnen den Durchschnitt von A und B: Weil (u, v) eine Basis ist, gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen x, y so, dass $xu + yv = b$ ist. Dann ist $\langle xu, c\rangle = \langle b - yv, c\rangle = \langle b, c\rangle$, also

$$x = \frac{\langle b, c\rangle}{\langle u, c\rangle}\,.$$

Der Schnittpunkt von A und B ist somit

$$\frac{\langle b, c\rangle}{\langle u, c\rangle}u\,.$$

Wir berechnen nun analog den Durchschnitt von A und C, dieser ist

$$\frac{\langle b, c\rangle}{\langle u, b\rangle}u\,.$$

Wegen $0 = \langle u, b - c\rangle$ ist $\langle u, b\rangle = \langle u, c\rangle$, also sind die Schnittpunkte von A und B sowie von A und C gleich. Daher schneiden einander alle drei Höhenlinien in einem Punkt.