Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2009

14. bzw. 15. Mai 2009

46) Was ist eine *orthogonale Funktion*? Was besagt der *Spektralsatz* für orthogonale Funktionen? Welche reellen Eigenwerte kann eine orthogonale Funktion haben? Es sei

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Überprüfen Sie, ob diese Matrix orthogonal ist. Berechnen Sie eine orthogonale 4×4-Matrix T so, dass die Matrix $T^{-1}AT$ Blockdiagonalform mit Blockgrößen 1 oder 2 hat.

47) Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum mit dem Skalarprodukt $< v, w >:= Re(\overline{v} \cdot w)$ (für $v, w \in \mathbb{C}$). Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ihre Matrix bezüglich der Basis $(1, i)$. Geben Sie Bedingungen für a, b, c, d dafür an, dass die Funktion f $\mathbb{C}$-linear bzw. orthogonal ist.

48) Was ist eine *Spiegelung*? Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Raum, U und W zwei verschiedene $(n-1)$-dimensionale Untervektorräume von V und s_U und s_W die Spiegelungen um diese Untervektorräume. Zeigen Sie: Genau dann ist

$$s_U \circ s_W = s_W \circ s_U ,$$

wenn $U^\perp$ und $W^\perp$ aufeinander senkrecht stehen.

49) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine ON-Basis von V. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : V \longrightarrow V$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 \longmapsto (\frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}c_2 + 2)v_1 + (\frac{2}{3}\sqrt{2}c_1 - \frac{1}{3}c_2 - 2\sqrt{2})v_2$$

eine Spiegelung ist. Berechnen Sie ihre Fixmenge und eine ON-Basis von V so, dass die Matrix des linearen Anteils der Spiegelung bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

50) Wir betrachten das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Matrix der Spiegelung s_U um den von $(1, 1, 0)$ und $(1, 2, 3)$ erzeugten Untervektorraum U von $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis. Berechnen Sie eine ON-Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich der die Matrix von s_U Diagonalgestalt hat. Berechnen Sie das Bild von $(1, -1, 1)$ unter der Spiegelung um den zu U parallelen affinen Unterraum, der den Punkt $(1, 0, -1)$ enthält.

51) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, a, b, c, d vier (paarweise verschiedene) Punkte in V so, dass die Abstände von a zu b und zu c gleich sind und die Abstände von d zu b und zu c gleich sind.
Zeigen Sie, dass $\langle a - d, b - c \rangle = 0$ ist. („Die Diagonalen eines Deltoids stehen aufeinander senkrecht.“)