Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2009

7. bzw. 8. Mai 2009

40) Was ist der *Fußpunkt des Lotes* eines Vektors v auf einen affinen Unterraum eines unitären Raumes V? Was ist der *Abstand eines Punktes* von einem affinen Unterraum?
Berechnen Sie die Fußpunkte der Lote von $(1-i, 2+i) \in \mathbb{C}^2$ auf die Geraden

$$\mathbb{C}\,(1, 2+i) \quad \text{und} \quad (1+i, 1+2i) + \mathbb{C}\,(2-i, 1-i)\,,$$

und die Abstände von $(1-i, 2+i)$ zu diesen Geraden.

41) Berechnen Sie die Fußpunkte der Lote von $(1, -1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$ auf die Ebenen

$$\mathbb{R}\,(1, 0, 2, 3) + \mathbb{R}\,(0, -1, -3, 2)$$

und

$$(0, 1, -1, 2) + \mathbb{R}\,(2, -1, 2, 0) + \mathbb{R}\,(1, 2, 0, 1)\,,$$

Berechnen Sie die Abstände von $(1, -1, 2, 1)$ zu diesen Ebenen.

42) Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Spalte $c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ so, dass der Abstand von c zu b möglichst klein ist und dass das durch A und c gegebene System linearer Gleichungen eine Lösung hat.
($\mathbb{R}^3$ wird als euklidischer Raum mit dem Standardskalarprodukt betrachtet).

43) Erläutern Sie die *Methode der kleinsten Quadrate*. Ein Unternehmen hat die folgenden Daten gesammelt: Werden an einem Tag 100 bzw. 200 bzw. 300 bzw. 350 bzw. 400 Stück eines Produktes produziert, so betragen die Gesamtkosten für die Produktion 14 000 bzw. 24 000 bzw. 39 000 bzw. 44 000 bzw. 48 000 Euro. Man nimmt an, dass der Zusammenhang zwischen Stückzahl und Produktionskosten durch eine affine Funktion beschrieben werden kann. Berechnen Sie näherungsweise diese Funktion und die voraussichtlichen Kosten für die Produktion von 500 Stück des Produktes.

44) Was ist eine *orthogonale Funktion*? Es seien $t \in \mathbb{R}$, $z := \cos(t) + i \sin(t)$ und

$$m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,, x \longmapsto z \cdot x\,,$$

die Multiplikation mit z. Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum mit dem Skalarprodukt $< v, w >:= Re(\overline{v} \cdot w)$ (für $v, w \in \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass m eine orthogonale Funktion ist. Berechnen Sie den Winkel zwischen $2 + i$ und $m(2 + i)$.

45) Was ist eine *Isometrie* eines euklidischen Raums? Welche Beziehung besteht zwischen Isometrien und orthogonalen Funktionen? Welche der zwei Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(x - 2y - 2z - 4, -2x + y - 2z + 2, 2x + 2y - z + 2)$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(x - 2y + 2z + 2, -2x + y + 2z + 4, 2x + 2y - z - 1)$$

ist eine Isometrie? Berechnen Sie ihren linearen Anteil und ihren Translationsanteil.