Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2010

20. bzw. 21. Mai 2010

40) Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte in der Zeichenebene. Beschreiben Sie alle Punkte D in der Zeichenebene so, dass die vier Punkte A, B, C, D ein Parallelogramm bilden. Zeigen Sie, dass in einem Parallelogramm die Streckenmittelpunkte der zwei Diagonalen gleich sind.
Betrachten Sie dazu die Zeichenebene
   a) nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und beschreiben Sie die gesuchten Punkte als Summen oder Differenzen von A, B, C;
   b) als affinen Raum und beschreiben Sie die gesuchten Punkte durch die Punkte A, B, C und geeignete Translationen.

41) Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum. Es seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte in der Zeichenebene und p' bzw. q' bzw. r' von q und r bzw. von p und r bzw. von p und q verschiedene Punkte auf der Geraden durch q und r bzw. von p und r bzw. von p und q. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen a, b, c so, dass

$$p = a(q - r') + r' \, , \; q = b(r - p') + p' \, , \; r = c(p - q') + q'$$

ist. Zeigen Sie: Die Punkte p', q', r' sind genau dann kollinear, wenn $a \cdot b \cdot c = 1$ ist („Satz von Menelaos“).
(Hinweis: Wir können annehmen, dass p der Nullpunkt der Zeichenebene ist. Zeigen Sie dann, dass (q, r) eine Basis der Zeichenebene ist und berechnen Sie die Koordinaten von $q' - p'$ und $r' - p'$ bezüglich dieser Basis).
Betrachten Sie die Zeichenebene als affinen Raum über dem Vektorraum ihrer Translationen. Formulieren Sie den Satz von Menelaos in diesem Kontext.

42) Durch welche Daten ist eine *lineare Ungleichung* in einem Vektorraum gegeben? Was ist ein *Halbraum*? Es sei

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}\,, (r,s,t,u) \longmapsto 3r - s - 3t + 2u\,,$$

und $b := 2$.
Berechnen Sie die im Satz 117 angegebenen Daten zur Beschreibung des Halbraumes $L(f, \leq b)$.
Geben Sie eine lineare Ungleichung an, deren Lösungsmenge der Halbraum mit Rand $\{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1\}$ ist, der $(1,2,3,4)$ enthält.

43) Erläutern Sie die folgende Maple-procedure, die nach Eingabe einer linearen Funktion f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ und einer endlichen Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ eine Teilmenge O von $\mathbb{R}^n$ ausgibt, die den Durchschnitt von dem von K erzeugten Kegel mit dem Kern von g erzeugt.

```
> SchnittHyperebeneKegel:=proc(f,K)
> local N,P,O,x,y;
> N:=NULL;P:=NULL;O:=NULL;
> for x in K do
> if f(op(x))>0 then P:=P,x fi;
> if f(op(x))<0 then N:=N,x fi;
> if f(op(x))=0 then O:=O,x fi;
> od;
> P:=[P];
> N:=[N];
> for x in N do
> for y in P do
> O:=O,f(op(y))*x-f(op(x))*y
> od;
> od;
> [O]
> end proc;
```

Die Funktion f wird dabei in der Form zum Beispiel $f := (a,b) -> 3*a - 2*b$ eingegeben, die Menge K als Liste von Listen (zum Beispiel $[[1,2],[4,3],[-1,2]]$). Auswerten von f in einem Element von $x \in K$ erfordert daher die Eingabe $f(op(x))$ und nicht $f(x)$.

Verwenden Sie diese procedure, um den Durchschnitt des Kerns von

$$g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \longmapsto x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

mit dem von

$$K := \{(1,2,1,0), (2,0,-2,3), (1,-2,0,-1), (1,0,-3,2)\}$$

erzeugten Kegel zu berechnen.

44) Erläutern Sie, wie man ein System homogener linearer Ungleichungen löst. Berechnen Sie mit Maple (und Aufgabe 43) eine endliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ so, dass der von M erzeugte Kegel die Lösungsmenge des Systems homogener linearer Ungleichungen

$$x + 3y + z \leq 0\,, \quad x - y + 2z \leq 0\,, \quad 2x - 3y + z \leq 0$$

ist.

45) Was ist ein *Kegel*? Was ist die *konvexe Hülle* einer Familie in einem reellen Vektorraum? Was ist ein *Polyeder*? Skizzieren Sie die Polyeder $L(f_1, f_2, f_3, \leq b_1, b_2, b_3)$ für

$$\begin{gathered}(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, (x, y) \longmapsto (2x-3y, -2x+3y, 2x-y) \\ \text{und} \quad (b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0), \\ (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, (x, y) \longmapsto (x, y, -x-2y) \\ \text{und} \quad (b_1, b_2, b_3) = (2, 1, 1), \\ (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4\,, (x, y) \longmapsto (x, y, 3x+y, y+3x) \\ \text{und} \quad (b_1, b_2, b_3, b_4) = (0, 0, -1, -1)\end{gathered}$$

und stellen Sie diese als Summen der konvexen Hülle einer endlichen Menge und eines endlich erzeugten Kegels dar!