Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2010

6. Mai 2010

34) Wann ist eine reelle symmetrische Matrix *positiv definit*? Wie überprüft man, ob eine reelle symmetrische Matrix positiv definit ist? Wie überprüft man, ob eine reelle Bilinearform ein Skalarprodukt ist? Es seien V ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum, $\underline{v}$ eine Basis von V und b_1, b_2, b_3 die Bilinearformen auf V, deren Matrizen bezüglich $\underline{v}$ gleich

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \\ -5 & -3 & 10 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sind. Überprüfen Sie, welche der drei Bilinearformen ein Skalarprodukt sind und berechnen Sie durch Kongruenzumformungen ihrer Matrizen jeweils eine Orthonormalbasis bezüglich diesem Skalarprodukt von V.

35) Überprüfen Sie, ob $(0,0,0)$ ein relatives Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \, , \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 \, ,$$

ist.

36) Es seien a_1, a_2, a_3, a_4 nicht kollineare und paarweise verschiedene Punkte in einem zweidimensionalen Vektorraum V. Für $1 \leq i < j \leq 4$ sei L_{ij} die Gerade durch a_i und a_j.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(1) Die Geraden L_{12} und L_{34} sowie die Geraden L_{14} und L_{23} sind parallel.
(2) $a_2 + a_4 = a_1 + a_3$.

37) Wie überprüft man, ob vier Punkte in einem Vektorraum *koplanar* sind? Was ist eine *affine Funktion*? Es seien $u := (1, 3, -2)$, $v := (1, 1, 4)$ und $w := (1, 2, 0)$ Elemente von $\mathbb{Q}^3$ und

$$f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3 ,$$
$$(a, b, c) \mapsto (2a + 4b - c + 2, a - 2b + c + 2, -a + 1) \ .$$

Berechnen Sie einen Punkt $y \in \mathbb{Q}^3$ so, dass die Geraden durch u und v und durch w und y sowie die durch w und v und durch u und y parallel sind. Zeigen Sie, dass die vier Punkte u, v, w, y dann koplanar sind. Zeigen Sie, dass die Funktion f affin ist. Berechnen Sie einen Punkt $z \in \mathbb{Q}^3$ so, dass die Geraden durch $f(u)$ und $f(v)$ und durch $f(w)$ und z sowie die durch $f(w)$ und $f(v)$ und durch $f(u)$ und z parallel sind.

38) Was ist der *Schwerpunkt* einer Familie von Vektoren? Was ist der *Mittelpunkt der Strecke* zwischen zwei Vektoren? Es seien u, v, w Elemente eines reellen Vektorraums und a, b, c die Mittelpunkte der Strecken zwischen u und v, v und w, w und u. Zeigen Sie, dass die Schwerpunkte von (u, v, w) und (a, b, c) gleich sind. Es sei V die affine Hülle von (u, v, w); wir nehmen an, dass sie zweidimensional ist und betrachten sie nach Wahl von u als Nullpunkt als Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau eine affine Funktion von V nach V gibt, die jeden der drei Punkte u, v, w auf den Mittelpunkt der Strecke zwischen den anderen zwei abbildet.

39) Es seien

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definite reelle symmetrische Matrizen. Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung dieser zwei Matrizen!