Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2010

15. bzw. 16. April 2010

19) Was sind *Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume* einer linearen Funktion (mit gleichem Definitions- und Bildbereich)? Es sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3) und $f : V \longrightarrow V$ die lineare Funktion mit

$$f(av_1 + bv_2 + cv_3) = (a + b)v_1 + (2a - b)v_2 + (a + b - 2c)v_3$$

(wobei a, b, c reelle Zahlen sind). Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von f.
Gibt es eine Basis von V, deren Vektoren Eigenvektoren von f sind? Wenn ja, berechnen Sie die Matrix von f bezüglich dieser Basis.

20) Es seien V und f wie in Aufgabe 19. Erläutern Sie, wie in der Vorlesung „Einführung in die Mathematik 1“ hohe Potenzen gewisser Matrizen berechnet wurden. Erklären Sie, was das für hohe Potenzen (bezüglich der Hintereinanderausführung) von linearen Funktionen von V nach V bedeutet. Berechnen Sie die Koordinate von $f^{100}(v_1)$ bei v_2 bezüglich (v_1, v_2, v_3).

21) Sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Funktion.
Zeigen Sie: Es gibt genau dann ein linear unabhängiges Paar von Eigenvektoren von f in V, wenn $f = \frac{\mathrm{Spur}(f)}{2} id_V$ oder $\mathrm{Spur}(f)^2 - 4\det(f) \neq 0$ ist.

22) Es sei V der komplexe Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, der von den Funktionen Sinus und Cosinus erzeugt wird.
Berechnen Sie Spur und Determinante der linearen Funktionen

$$D : V \longrightarrow V\,,\ a\cos + b\sin \longmapsto -a\sin + b\cos$$

und $D \circ D$. Kennen Sie diese Funktionen? Berechnen Sie die Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und die entsprechenden Eigenräume in V von D und von $D \circ D$.

23) Es seien

$$U_1 := \mathbb{R}\,(1,1,-1),\ U_2 := \mathbb{R}\,(2,1,1),\ U_3 := \mathbb{R}\,(0,-1,3),$$
$$U_4 := \mathbb{R}\,(3,2,0) + \mathbb{R}\,(-1,0,-2)$$

und

$$U_5 := \mathbb{R}\,(1,2,3) + \mathbb{R}\,(-1,2,-2)$$

Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie Basen der Untervektorräume

$$U_1 + U_2,\ U_1 + U_3,\ U_2 + U_3,$$
$$U_1 + U_2 + U_3,\ U_4 + U_5,\ U_1 + U_4,\ U_3 + U_4\,.$$

Welche dieser Summen sind direkt?

24) Was ist eine *multilineare Funktion*? Was ist eine *alternierende Funktion*? Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

die multilineare Funktion mit

$$f(e_i, e_j, e_k) := (j-i)\cdot(k-j)\cdot(i-k)\,, \quad 1 \le i,j,k \le 3\,.$$

Ist f alternierend? Berechnen Sie $f((1,0,2),(2,1,1),(0,2,1))$ und $f((a,b,c),(a,b,c),(a,b,c))$ (wobei a,b,c reelle Zahlen sind)!