Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2010

25. bzw. 26. März 2010

13) Was ist ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form*? Durch welche (endlich vielen) Daten wird seine Lösungsmenge beschrieben? Wie werden diese berechnet? Es seien K ein Körper und

$$V := \{A \in K^{2\times 2} \mid A_{11} + A_{22} = 0\} \ .$$

Berechnen Sie

$$Z(M) := \{B \in V \mid MB = BM\}$$

(„Zentralisator von M in V"), wobei M eine der folgenden Matrizen ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

14) Es sei V der Untervektorraum des Vektorraums $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,, \mathbb{R}\,)$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, der von den Funktionen Sinus und Cosinus erzeugt wird.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$D : V \longrightarrow V \ , \ f \longmapsto f'' - 2f' + 3f$$

wohldefiniert, linear und bijektiv ist. Berechnen Sie Spur und Determinante dieser Funktion. Lösen Sie die lineare Gleichung, die durch D und die Funktion Cosinus (in V) gegeben ist.

15) Es sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum, $v, w \in V$, $v \neq w$ und G die Gerade durch v und w. Was heißt es, G in *impliziter Form* anzugeben? Wie bestimmt man die dafür nötigen Daten? Führen Sie das für $V := \mathbb{R}^3$ und $v := (1, 0, 1)$, $w := (1, 1, -2)$ aus!

16) Es seien V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller linearen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ und

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; g \longmapsto (g((-1,2)), g((2,1))$$

(„Auswerten von linearen Funktionen in $(-1,2)$ und $(2,1)$“). Es sei p_i die durch $p_i((a_1,a_2)) := a_i$ definierte lineare Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, $i = 1,2$.
Zeigen Sie, dass f linear und bijektiv ist. Zeigen Sie, dass (p_1,p_2) eine Basis von V ist und berechnen Sie die Matrix von f bezüglich der Basen (p_1,p_2) von V und $((1,0),(0,1))$ von $\mathbb{Q}^2$.
Berechnen Sie die Matrix der Umkehrfunktion von f bezüglich der Basen $((1,0),(0,1))$ und (p_1,p_2) und das Urbild bezüglich f von $(3,-2)$ („Interpolation durch eine lineare Funktion“).

17) Wir betrachten die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes 0 als Vektorraum. Sei (P_1,P_2) eine Basis dieses Vektorraums E und sei $X_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $c_1P_1 + c_2P_2 \longmapsto c_i$ die lineare Funktion, die jedem Punkt von E seine i-te Koordinate bezüglich (P_1,P_2) zuordnet $(i = 1,2)$. Lösen Sie die durch

$$3X_1 + 2X_2 : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad 1 \in \mathbb{R}$$

gegebene lineare Gleichung.
Geben Sie eine implizite Form der Geraden durch $P_1 + P_2$ und $-P_1 + 3P_2$ an.

18) Was ist eine *injektive* bzw. *surjektive* Funktion? Welche Eigenschaften von injektiven bzw. surjektiven linearen Funktionen kennen Sie?
Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K, $\underline{v} := (v_1,\ldots,v_n)$ bzw. $\underline{w} := (w_1,\ldots,w_m)$ Basen von V bzw. W, $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Funktion und $A := M(f,\underline{v},\underline{w})$ die Matrix von f bezüglich der Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$. Wie kann man mit Hilfe der Matrix A entscheiden, ob die lineare Funktion f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist? Was bedeutet das für den Spezialfall $m = n$?