Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2009

25. bzw. 26. Juni 2009

70) Was bedeutet es, eine Determinante durch *Entwicklung nach einer Zeile* zu berechnen? Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen durch Entwicklung nach Zeilen oder Spalten:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

71) Was ist die zu einer Matrix *adjungierte Matrix*? Berechnen Sie - falls möglich - die zu den Matrizen A und B von Aufgabe 70 inversen Matrizen sowie die zu A und B adjungierten Matrizen. (Hinweis: Nachdenken spart Rechenzeit).

72) Es sei A eine rationale invertierbare 3×3-Matrix und b eine rationale Spalte mit 3 Zeilen. Die Einträge von A und b seien durch Zähler und Nenner dargestellt. Wieviele Multiplikationen von ganzen Zahlen sind erforderlich, um die Lösung des durch A und b gegebenen Systems linearer Gleichungen zu berechnen, wenn dazu a) die Cramersche Regel b) das Gauß-Verfahren verwendet wird?

(Multiplikation oder Division der rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ erfordert 2 Multiplikationen von ganzen Zahlen, Addition bzw. Subtraktion aber 3 .)

73) Wann sind zwei Matrizen *kongruent*? Erläutern Sie, wie man eine zu einer gegebenen reellen symmetrischen Matrix kongruente Diagonalmatrix berechnet. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie eine invertierbare 4×4-Matrix P so, daß $P^T \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist.

74) Es sei V ein reeller Vektorraum. Was ist eine *bilineare Funktion* von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$? Was ist die *Matrix einer bilinearen Funktion* bezüglich einer Basis von V? Überprüfen Sie, ob zwei der folgenden drei reellen symmetrischen Matrizen dieselbe Bilinearform (bezüglich verschiedener Basen) beschreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

75) Was ist die *Signatur* einer reellen symmetrischen Matrix bzw. einer reellen symmetrischen Bilinearform? Berechnen Sie die Signatur der Bilinearformen

$$b_1 : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A,B) \longmapsto \mathrm{Spur}(A \circ B^\top)$$

und

$$b_2 : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A,B) \longmapsto \mathrm{Spur}(A \circ B)\ .$$