Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2009

18. bzw. 19. Juni 2009

64) Was sind die *Euler-Winkel* einer Drehung in einem dreidimensionalen orientierten euklidischen Raum? Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \, , (a,b,c) \longmapsto (-b,-a,-c) \, ,$$

eine Drehung ist und berechnen Sie ihre Euler-Winkel bezüglich der Standardbasis.

65) Was ist eine *Symmetrieoperation*, was ist die *Symmetriegruppe* einer Teilmenge eines euklidischen Raums? Berechnen Sie die Symmetriegruppen von

$$\{(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

$$\{(1,1),(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$\{(1,1,0),(-1,1,0),(-1,-1,0),(1,-1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

66) Was ist die zu einer linearen Funktion *adjungierte* lineare Funktion? Was ist eine *selbstadjungierte* lineare Funktion? Was besagt der *Spektralsatz für selbstadjungierte Funktionen*? Berechnen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} T$$

eine Diagonalmatrix ist.

67) Was ist eine *normale* lineare Funktion? Was besagt der *Spektralsatz für normale Funktionen*? Zeigen Sie, dass die lineare Funktion

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \ (a,b) \longmapsto (5a - 12b, 12a + 5b)$$

normal ist (das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ sei das Standardskalarprodukt). Berechnen Sie eine ON-Basis aus Eigenvektoren dieser Funktion.

68) Was ist eine *orthogonale* Funktion? Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Funktion.
Zeigen Sie: Die lineare Funktion f ist genau dann normal, wenn f selbstadjungiert oder ein skalares Vielfaches einer orthogonalen Funktion ist.
Zeigen Sie: Wenn f orthogonal ist, dann ist f genau dann selbstadjungiert, wenn f eine Spiegelung oder Id_V oder $-Id_V$ ist.

69) Was ist eine *multilineare Funktion*? Was ist eine *alternierende Funktion*? Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$,

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

die multilineare Funktion mit

$$f(e_i, e_j, e_k) := (j - i) \cdot (k - j) \cdot (i - k), \quad 1 \leq i, j, k \leq 3,$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die alternierende Funktion mit

$$g(e_1, e_2) = (1, 1), \ g(e_1, e_3) = (2, 1) \ \text{ und } g(e_2, e_3) = (1, -1).$$

Ist f alternierend? Berechnen Sie $f((1,0,2),(2,1,1),(0,2,1))$ und $g((1,2,3),(3,2,1))$!