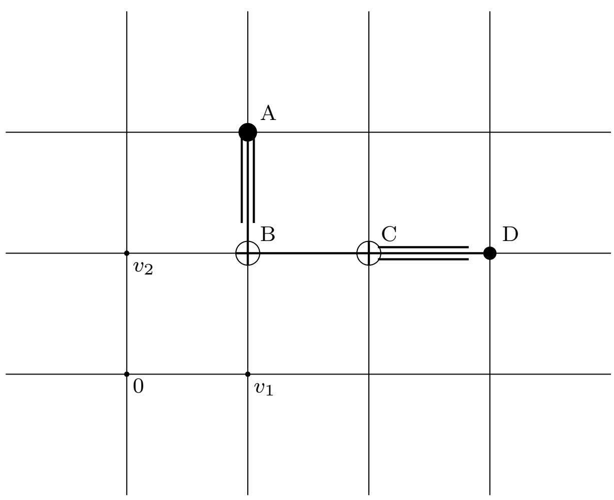
Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2010

17. bzw. 18. Juni 2010

64) Was ist ein *orientierter Winkel*? Es sei V der von $v := (4, 0, 3)$ und $w := (1, 1, 1)$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ (mit Standardskalarprodukt). Berechnen Sie den orientierten Winkel von $v + w$ nach $v - w$ bezüglich der durch die Basis (v, w) definierten Orientierung von V.

65) Es seien V ein 2-dimensionaler orientierter euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Was ist eine *Drehung* in V, was ist ihr *Drehwinkel* und ihr *Drehpunkt*? Es seien d die Drehung um den Drehpunkt 0 mit Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$, t die Translation mit $t(0) = 2v_1$ und s die Spiegelung um die Gerade $\mathbb{R}(v_1 - v_2)$. Berechnen Sie die Fixmengen von $t \circ s \circ d$ und von $t \circ d \circ s$.

66) Es seien V ein 2-dimensionaler orientierter euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Ein „Roboterarm in V" sei in $A := v_1 + 2v_2$ befestigt, A ist mit einem Drehgelenk B in $v_1 + v_2$ verbunden, B ist weiters mit einem Drehgelenk C in $2v_1 + v_2$ verbunden und C ist mit der „Roboterhand" D in $3v_1 + v_2$ verbunden. Die Verbindungen von A nach B und von B nach C können verlängert werden. Berechnen Sie die Position der Roboterhand, wenn in B um $\frac{\pi}{3}$ und in C um $\frac{\pi}{4}$ gedreht, und die Abstände von A nach B um 0.5 und von B nach C um 0.5 verlängert werden.



67) Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum, der durch die Basis $(1, i)$ orientiert ist. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad z \longmapsto (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z + 1 + i$$

eine Drehung ist. Berechnen Sie ihren Drehpunkt und ihren Drehwinkel.

68) Es seien V ein 2-dimensionaler euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine Orthonormalbasis von V. Die linearen Funktionen f, g, h von V nach V sind durch ihre Matrizen

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}, \; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}, \; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

bezüglich $\underline{v}$ gegeben. Welche dieser Funktionen sind orthogonal, welche sind Spiegelungen, welche Drehungen? Berechnen Sie für die Spiegelungen die Fixmenge und schreiben Sie die Drehungen als Produkt von zwei Spiegelungen!

69) Berechnen Sie die Fixmengen der folgenden Isometrien und bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (a, b) \mapsto (a + 1, b + 2)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (a, b) \mapsto (\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b + 1, \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b + 2)$$
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (a, b) \mapsto (\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b - 1, \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b + 1)$$
$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (a, b) \mapsto (\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b + 2, \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b - 4)$$