Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2009

4. bzw. 5. Juni 2009

58) Es seien V ein 2-dimensionaler euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine Orthonormalbasis von V. Die linearen Funktionen f, g, h von V nach V sind durch ihre Matrizen

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

bezüglich $\underline{v}$ gegeben. Welche dieser Funktionen sind orthogonal, welche sind Spiegelungen, welche Drehungen? Berechnen Sie für die Spiegelungen die Fixmenge und schreiben Sie die Drehungen als Produkt von zwei Spiegelungen!

59) Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der durch die Standardbasis gegebenen Orientierung als orientierten euklidischen Raum. Was ist eine *Drehung* in $\mathbb{R}^3$? Was ist die *Drehachse*, was ist die *Drehebene*, was ist der *Drehwinkel* einer Drehung? Berechnen Sie die Matrix bezüglich der Standardbasis der Drehung um die Drehachse $\mathbb{R}(1, 2, -2)$ mit Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$. Dabei sei die Drehebene E so orientiert, dass für eine positiv orientierte Basis (u, v) von E die Basis $(u, v, (1, 2, -2))$ von $\mathbb{R}^3$ positiv orientiert ist.

60) Es seien V ein 3-dimensionaler orientierter euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Was ist eine eine *Drehspiegelung* in V? Was ist deren *Drehachse* und deren *Spiegelungsebene*? Die Funktion f von V nach V sei eine Drehung (bzw. Drehspiegelung) um die Drehachse $\mathbb{R}(v_1 - 2v_2 + 2v_3)$ mit Drehwinkel $\frac{5\pi}{3}$. Dabei ist die Drehebene durch eine Basis (w_1, w_2) so zu orientieren ist, daß $(w_1, w_2, v_1 - 2v_2 + 2v_3)$ eine positiv orientierte Basis von V ist. Berechnen Sie die Matrix von f bezüglich $\underline{v}$.

61) Es sei V ein 3-dimensionaler orientierter euklidischer Raum. Sei $u \in V$ mit $||u|| = 1$ und d eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}\,u$ mit Drehwinkel α. Die Drehebene sei durch eine ON-Basis (w_1, w_2) so orientiert, dass (w_1, w_2, u) eine positiv orientierte ON-Basis von V ist. Zeigen Sie: Für alle $v \in V$ ist

$$d(v) = (1 - \cos(\alpha))\langle u, v\rangle \cdot u + \cos(\alpha) \cdot v + \sin(\alpha) \cdot (u \times v)\ .$$

62) Was ist eine *Schraubung*, was ist eine *Drehspiegelung*? Die folgenden Funktionen f, g, h, k von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ (mit dem Standardskalarprodukt) sind Isometrien. Bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Schraubungen, Drehspiegelungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt.

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} \frac{7\,x}{9} - \frac{4\,y}{9} - \frac{4\,z}{9} \\ \frac{4\,x}{45} + \frac{7\,y}{9} - \frac{28\,z}{45} \\ \frac{28\,x}{45} + \frac{4\,y}{9} + \frac{29\,z}{45} \end{bmatrix}$$

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} -\frac{3\,x}{13} + \frac{4\,y}{13} - \frac{12\,z}{13} \\ \frac{12\,x}{13} - \frac{3\,y}{13} - \frac{4\,z}{13} \\ \frac{4\,x}{13} + \frac{12\,y}{13} + \frac{3\,z}{13} \end{bmatrix}$$

$$h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} \frac{x}{9} - \frac{4\,y}{9} + \frac{8\,z}{9} - 1 \\ -\frac{4\,x}{9} + \frac{7\,y}{9} + \frac{4\,z}{9} - 1 \\ \frac{8\,x}{9} + \frac{4\,y}{9} + \frac{z}{9} + 3 \end{bmatrix}$$

$$k(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{bmatrix} \frac{7\,x}{9} - \frac{4\,y}{9} - \frac{4\,z}{9} + 2 \\ \frac{4\,x}{45} + \frac{7\,y}{9} - \frac{28\,z}{45} - 1 \\ \frac{28\,x}{45} + \frac{4\,y}{9} + \frac{29\,z}{45} + 2 \end{bmatrix}$$

63) Es seien V ein 3-dimensionaler orientierter euklidischer Raum, $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V und f die lineare Funktion von V nach V, deren Matrix bezüglich $\underline{v}$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -6 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

ist.

Zeigen Sie, dass f eine Drehspiegelung ist und berechnen Sie die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels.