Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2009

28. bzw. 29. Mai 2009

52) Was ist ein *orientierter Winkel*? Es sei V der von $v := (1, -1, 3)$ und $w := (1, 0, 1)$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ (mit Standardskalarprodukt). Berechnen Sie den orientierten Winkel von v nach w bezüglich der durch die Basis $(v + w, v - w)$ definierten Orientierung von V.

53) Es seien V ein 2-dimensionaler orientierter euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Was ist eine *Drehung* in V, was ist ihr *Drehwinkel* und ihr *Drehpunkt*? Es seien d die Drehung um den Drehpunkt 0 mit Drehwinkel $\frac{\pi}{3}$, t die Translation mit $t(0) = (2+\sqrt{3})v_1 - v_2$ und s die Spiegelung um die Gerade $\mathbb{R}(v_1 - v_2)$. Berechnen Sie die Fixmengen von $t \circ s \circ d$ und von $t \circ d \circ s$.

54) Es seien V ein 2-dimensionaler orientierter euklidischer Raum und $\underline{v}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V. Ein „Roboterarm in V“ sei in $A := v_1 + v_2$ befestigt, A ist mit einem Drehgelenk B in v_1 verbunden, B ist weiters mit einem Drehgelenk C in $2v_1$ verbunden und C ist mit der „Roboterhand“ D in $3v_1$ verbunden. Die Verbindungen von A nach B und von B nach C können verlängert werden. Berechnen Sie die Position der Roboterhand, wenn in B um $\frac{\pi}{4}$ und in C um $\frac{\pi}{3}$ gedreht, und die Abstände von A nach B um 3 und von B nach C um 1 verlängert werden.

55) Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen euklidischen Raum, der durch die Basis $(1, i)$ orientiert ist. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad z \longmapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 2 + 3i$$

eine Drehung ist. Berechnen Sie ihren Drehpunkt und ihren Drehwinkel.

56) Berechnen Sie die Fixmengen der folgenden Isometrien und bestimmen Sie, ob es sich um Drehungen, Spiegelungen, Translationen oder Gleitspiegelungen handelt.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (a,b) \mapsto (a+1, b+2)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (a,b) \mapsto \left(\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b + 1, \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b + 2\right)$$
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (a,b) \mapsto \left(\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b - 1, \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b + 1\right)$$
$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (a,b) \mapsto \left(\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b + 2, \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b - 4\right)$$

57) Berechnen Sie (mit „Zeigerrechnung“) reelle Zahlen a und φ so, dass für alle reellen Zahlen t

$$2 \cdot \sin(2t) + \cos(2t) = a \cdot \sin(2t + \varphi)$$

ist.