Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2009

6. März 2009

1) Was ist ein *Erzeugendensystem eines Vektorraums*? Was ist eine *linear unabhängige* Familie von Vektoren? Was ist eine *Basis* eines Vektorraums? Es sei $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der binäre Körper, V der Vektorraum aller Folgen in $\mathbb{Z}_2$ („$0-1-$Folgen“) und für $i \in \mathbb{N}$ sei e_i die Folge mit $e_i(j) := \delta_{ij}$, $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Familien kein Erzeugendensystem von V sind. Welche sind linear unabhängig? Erzeugen alle denselben Untervektorraum?

$$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}\ , \quad (\sum_{i=0}^{k} e_i)_{k\in\mathbb{N}}\ , \quad (e_0 + e_i)_{i\in\mathbb{N}}\ .$$

2) Es sei K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring in der Variablen x mit Koeffizienten in K. Zeigen Sie: Jede Familie $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $f_i \neq 0$ und $gr(f_i) = i$, für alle $i \in \mathbb{N}$, ist eine Basis (über K) von $K[x]$. Beschreiben Sie ein Verfahren, um die Koordinaten eines Polynoms bezüglich einer solchen Basis zu berechnen. Zeigen Sie, dass für jedes $a \in K$ die Familie $((x-a)^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $K[x]$ ist.
Hinweis: Um die Koordinaten von $0 \neq g \in K[x]$ bezüglich der Basis $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zu berechnen, dividieren Sie zuerst g mit Rest durch $f_{gr(g)}$, der polynomiale Quotient ist dann die Koordinate von g bei $f_{gr(g)}$.

3) Es sei n eine positive ganze Zahl, V der Untervektorraum

$$\{\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \mid c_i \in \mathbb{R}\}$$

von $\mathbb{R}[x]$ und

$$D : V \longrightarrow V\ ,\ \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} i c_i x^{i-1}\ .$$

Zeigen Sie, dass D eine lineare Funktion ist. Bestimmen Sie die Matrix A von $D^2 = D \circ D$ bezüglich der Basis $(x^i)_{0\le i\le n}$ von V. Berechnen Sie den Rang von A und die Lösungsmengen $L(A, g)$, für alle $g \in \mathbb{R}^{(n+1)\times 1}$.

4) Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis? Was ist die *Transformationsmatrix* von einer Basis eines Vektorraums V zu einem q-Tupel von Vektoren in V? Wie kann man mit Hilfe dieser Transformationsmatrix entscheiden, ob diese q-Tupel eine Basis von V ist?
Es sei $\underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$,

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass $\underline{u} := \underline{e}T$ und $\underline{w} := \underline{u}S$ Basen von $\mathbb{Q}^3$ sind.

5) Wenn R die Transformationsmatrix von einer Basis $\underline{v}$ zu einer Basis $\underline{w}$ ist und d die Koordinatenspalte eines Vektors x bezüglich $\underline{w}$, wie berechnet man dann die Koordinatenspalte von x bezüglich $\underline{v}$?
Es seien $\underline{e}$, $\underline{u}$, $\underline{w}$, S und T wie in Aufgabe 4. Berechnen Sie die Koordinatenspalten der Standardzeilen e_1, e_2, e_3 bezüglich der Basen $\underline{u}$ und $\underline{w}$. Berechnen Sie die Transformationsmatrix von $\underline{u}$ zu $\underline{w}$. Berechnen Sie die Koordinatenspalte von $w_1 + 2w_2 - 3w_3$ bezüglich $\underline{u}$ und von $u_1 + u_2 - 2u_3$ bezüglich $\underline{w}$.

6) Was ist der *Graph* einer Funktion? Welche Eigenschaft haben Graphen von linearen Funktionen? Wir betrachten die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunkts und einer Basis als Vektorraum $\mathbb{R}^2$. (Also: ein Punkt „ist" ein Paar von reellen Zahlen). Welche Geraden durch den Nullpunkt sind Graphen von linearen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$? Zeigen Sie: Wenn f eine solche Funktion ist, dann ist ihr Graph die Lösungsmenge (mindestens) einer Gleichung in zwei Unbekannten. Geben Sie eine solche Gleichung mit Hilfe der Zahl $f(1)$ an.
Kann man auch die Graphen von linearen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ und von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ geometrisch interpretieren?