Proseminar Lineare Algebra 2
Sommersemester 2010

29. bzw. 30. April 2010

31) Es sei V ein reeller Vektorraum. Was ist eine *bilineare Funktion* von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$? Was ist die *Matrix einer bilinearen Funktion* bezüglich einer Basis von V? Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen

$$b_1 : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A,B) \longmapsto \mathrm{Spur}(A \circ B^\top)$$

und

$$b_2 : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A,B) \longmapsto \mathrm{Spur}(A \circ B)$$

bilinear sind und berechnen Sie deren Matrizen bezüglich der Basen

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) .$$

32) Wann sind zwei Matrizen *kongruent*? Erläutern Sie, wie man eine zu einer gegebenen reellen symmetrischen Matrix kongruente Diagonalmatrix berechnet. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie eine invertierbare 4×4-Matrix P so, daß $P^T \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist.

33) Was ist die *Signatur* einer reellen symmetrischen Matrix bzw. einer reellen symmetrischen Bilinearform? Berechnen Sie die Signatur der Bilinearform

$$b_1 : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (A,B) \longmapsto \mathrm{Spur}(A \circ B^\top)\,.$$

Überprüfen Sie, ob zwei der folgenden drei reellen symmetrischen Matrizen dieselbe Bilinearform (bezüglich verschiedener Basen) beschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$