Prüfung Lineare Algebra 2

1. Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Es gibt eine orthogonale Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ eine reelle Diagonalmatrix ist.
(2) A ist zur Einheitsmatrix kongruent.
(3) Wenn A die Matrix einer Bilinearform bezüglich irgendeiner Basis ist, dann ist diese Bilinearform symmetrisch.

A. (2) ist wahr, (1) und (3) sind falsch.

B. (1), (2) und (3) sind wahr.

C. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

D. (1) ist wahr, (2) und (3) sind falsch.

E. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

---

2. Es seien V ein dreidimensionaler euklidischer Raum und (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von V. Weiters seien d_1 die Drehung um die Drehachse $\mathbf{R}v_1$, die v_2 auf v_3 abbildet und d_3 die Drehung um die Drehachse $\mathbf{R}v_3$, die v_1 auf v_2 abbildet. Dann ist der Cosinus des Drehwinkels von $d_3 \circ d_1$ gleich

---

A. 1

B. -1

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

E. 0

---

3. Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Raum. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A. Jede Isometrie von V ist eine orthogonale Abbildung oder eine Translation in V.

B. Eine affine Abbildung von V nach V, die 0 auf 0 abbildet, ist eine Isometrie von V.

C. Wenn f eine Isometrie von V ist und $f(0) = 0$ ist, dann ist f linear.

D. Für je zwei Isometrien f, g von V ist $f \circ g = g \circ f$.

E. Translationen in V und lineare Abbildungen von V nach V sind Isometrien von V.

---

4. Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig ?

A. Wenn $\dim(V) \leq \dim(W)$ ist, dann ist f injektiv.

B. Wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ ist, dann ist f surjektiv.

C. Wenn $V = W$ ist, dann ist $\mathrm{Kern}(f) \subset \mathrm{Bild}(f)$.

D. Wenn $\mathrm{Kern}(f) = V$ ist, dann ist $W = \{0\}$.

E. Wenn $\dim(V) = 6$, $\dim(W) = 4$ und $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2$ ist, dann ist f surjektiv.

---

5. Wieviele Elemente enthalten die Symmetriegruppen von $\{(2,0),(0,0),(0,2),(2,2)\}$ in $\mathbf{R}^2$ bzw. $\{(0,2,0),(0,0,0),(0,0,2),(0,2,2)\}$ in $\mathbf{R}^3$?

A. 4 bzw. 4

B. 8 bzw. 8

C. 8 bzw. 16

D. 4 bzw. 8

E. 8 bzw. unendlich viele

---

6. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $w \in V$ und $f : V \to V$ eine lineare Funktion. Sei A die Matrix von f und x die Koordinatenspalte von w bzgl. der Basis $\underline{v}$ von V. Sei $\underline{u}$ eine weitere Basis von V und sei T die Transformationsmatrix von $\underline{v}$ nach $\underline{u}$, also $\underline{u} = \underline{v} \cdot T$. Die Matrix von f und die Koordinaten von $f(w)$ bzgl. der Basis $\underline{u}$ sind dann

---

A. TAT^{-1} und TAx

B. $T^{-1}AT$ und $T^{-1}Ax$

C. AT^{-1} und $AT^{-1}x$

D. $T^{-1}AT$ und $AT^{-1}x$

E. TAT^{-1} und ATx

---

7. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Der Graph einer affinen Funktion von V nach W ist ein affiner Unterraum von $V \times W$.
(2) Das Bild einer konvexen Kombination unter einer affinen Abbildung ist die entsprechende konvexe Kombination der Bilder.
(3) Zwei Geraden $p_1 + Kv_1$ und $p_2 + Kv_2$ sind genau dann koplanar, wenn die Vektoren $p_1 + p_2$, v_1 und v_2 linear abhängig sind.

A. (1) , (2) und (3) sind wahr.

B. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

C. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

D. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

E. (1) ist wahr, (2) und (3) sind falsch.

---

8. A sei eine reelle $n \times n$-Matrix und I_n sei die $n \times n$-Einheitsmatrix. V sei ein n-dimensionaler euklidischer Raum. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

A. Wenn A die Matrix einer orthogonalen Funktion von V nach V bezüglich einer Basis von V ist, dann ist A orthogonal.

B. Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist 1 oder -1.

C. Wenn A orthogonal ist, dann ist die zu A transponierte Matrix gleich der zu A inversen Matrix.

D. Wenn c ein reeller Eigenwert von A ist, dann ist $c^2 = 1$.

E. Wenn die Zeilen von A eine Orthonormalbasis des Vektorraums aller reellen n-Tupel (mit dem Standardskalarprodukt) bilden, dann ist A orthogonal.

---

9. Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Raum.
Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Die Determinante jeder Spiegelung in V ist -1.
(2) Jede orthogonale Abbildung von V nach V ist Produkt von höchstens n Spiegelungen.
(3) Wenn F die Fixmenge einer Spiegelung s und p die orthogonale Projektion auf F ist, dann ist $s = p - Id_V$.

A. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

B. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

C. (1) ist wahr, (2) und (3) sind falsch.

D. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

E. (1), (2) und (3) sind wahr.

---

10. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Wenn s eine Spiegelung mit $s(0) = 0$ und d eine Drehung um 0 in der Ebene ist, dann ist die Hintereinanderausführung $s \circ d \circ s \circ d$ eine Drehung.
(2) Zwei reelle symmetrische Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche Signatur haben.
(3) Spiegelungen eines euklidischen Raumes sind selbstadjungiert.

A. (1), (2) und (3) sind wahr.

B. (2) ist wahr, (1) und (3) sind falsch.

C. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

D. (1) ist wahr, (2) und (3) sind falsch.

E. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

---

11. Schreiben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe genau an!

Sei V ein reeller Vektorraum und $w_1, \ldots, w_n$ Vektoren in V. Die *affine Hülle* von $w_1, \ldots, w_n$ ist

$\{ \qquad \}$

Sei V ein reeller Vektorraum und $w_1, \ldots, w_n$ Vektoren in V. Der von $w_1, \ldots, w_n$ erzeugte *Kegel* im Vektorraum V ist

$\{ \qquad \}$

Sei W ein komplexer Vektorraum. Eine Funktion $\langle -, - \rangle : W \times W \longrightarrow \mathbf{C}$ ist genau dann ein *Skalarprodukt*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Sei U ein endlichdimensionaler Vektorraum. Eine lineare Funktion f von U nach U ist genau dann *diagonalisierbar*, wenn ...

Prüfung Lineare Algebra 2

12. V mit $< -,- >$ sei ein euklidischer Raum. Schreiben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe genau an!

Eine Funktion f von V nach V ist genau dann eine *Isometrie*, wenn ...

Eine Funktion s von V nach V ist genau dann eine *Spiegelung*, wenn ...

Eine affine Funktion h von V nach V ist genau dann eine *orientierungserhaltend*, wenn ...

Wir nehmen an, dass die Dimension von V drei ist und dass bekannt ist, was eine Drehung in V ist. Eine *Schraubung* ist dann ...

Prüfung Lineare Algebra 2

13. V sei mit $\langle -, - \rangle$ ein zweidimensionaler orientierter euklidischer Raum. Beschreiben Sie alle Isometrien von V, indem Sie deren mögliche Fixmengen und die Eigenschaft orientierungserhaltend bzw. orientierungsumkehrend betrachten!

14. V sei ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Um die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen auf V durch endlich viele Daten zu beschreiben, berechnet man eine Lösung und eine Basis des Lösungsraums der entsprechenden homogenen Gleichung. Welche endlichen Teilmengen von V muss man berechnen, um die Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen zu beschreiben? Wie kann man dann eine (bzw. jede) Lösung mit Hilfe dieser Teilmengen darstellen?

Prüfung Lineare Algebra 2

15. Formulieren Sie den Spektralsatz für orthogonale Funktionen und seine Matrizenform!

Prüfung Lineare Algebra 2

16. A sei eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in einem Körper K. Wie ist die zu A adjungierte Matrix definiert und wie hängt diese mit der zu A inversen Matrix zusammen?

ANSWERKEY FOR "LA2˙11Juli08"

```
Version 1:  C  C  C  E  C  B  B  A  B  C
```