Vertiefung Lineare Algebra 1

Schriftliche Unterlagen zur Vorlesung
im Wintersemester 2015/16

Franz Pauer

KAPITEL 1

Mehr über lineare Funktionen

In diesem Kapitel sei K ein Körper.

§1. Der Graph einer linearen Funktion

Satz 1 : *Seien $V_1, \ldots, V_\ell$ Vektorräume über K. Dann wird das kartesische Produkt*

$$V_1 \times \cdots \times V_\ell = \{(x_1, \ldots, x_\ell) \mid x_1 \in V_1, \ldots, x_\ell \in V_\ell\}$$

mit der komponentenweisen Addition

$$(x_1, \ldots, x_\ell) + (y_1, \ldots, y_\ell) := (x_1 + y_1, \ldots, x_\ell + y_\ell)$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$c(x_1, \ldots, x_\ell) := (cx_1, \ldots, cx_\ell)$$

mit $c \in K$ ein Vektorraum und heißt der Produktraum *von $V_1, \ldots, V_\ell$.*

Wenn $(v_{11}, \ldots, v_{1n_1}), \ldots, (v_{\ell 1}, \ldots, v_{\ell n_\ell})$ Basen von $V_1, \ldots, V_\ell$ sind, dann ist

$$\begin{aligned} &((v_{11}, 0, \ldots, 0), \ldots, (v_{1n_1}, 0, \ldots, 0), \ldots \\ &\ldots, (0, \ldots, 0, v_{\ell 1}), \ldots, (0, \ldots, 0, v_{\ell n_\ell})) \end{aligned}$$

eine Basis von $V_1 \times \cdots \times V_\ell$, insbesondere gilt

$$\dim_K(V_1 \times \cdots \times V_\ell) = \dim_K(V_1) + \cdots + \dim_K(V_\ell)\,.$$

Beweis: Es ist leicht zu zeigen, dass $V_1 \times \cdots \times V_\ell$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist.
Wir beweisen daher nur, dass
$((v_{11}, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, v_{\ell n_\ell}))$ eine Basis von $V_1 \times \cdots \times V_\ell$ ist. Wir schreiben $x_1 \in V_1, \ldots, x_\ell \in V_\ell$ als Linearkombinationen der Basen $(v_{11}, \ldots, v_{1n_1}), \ldots, (v_{\ell 1}, \ldots, v_{\ell n_\ell})$:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_1} d_{1i} v_{1i}, \ \ldots, x_\ell = \sum_{i=1}^{n_\ell} d_{\ell i} v_{\ell i}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_\ell) &= (x_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} d_{1i}(v_{1i}, 0, \ldots, 0) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_\ell} d_{\ell i}(0, \ldots, 0, v_{\ell i})\,, \end{aligned}$$

also $((v_{11},0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,v_{\ell n_\ell}))$ ein Erzeugendensystem von $V_1\times\cdots\times V_\ell$. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, seien $c_{11},\dots,c_{\ell n_\ell}\in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}(v_{1i},0,\dots,0)+\cdots+\sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}(0,\dots,0,v_{\ell i})=(0,\dots,0)\,.$$

Dann ist

$$(\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}v_{1i},\dots,\sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}v_{\ell i})=(0,\dots,0)\,,$$

also

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}v_{1i}=0\,,\ \dots\,,\ \sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}v_{\ell i}=0\,.$$

Da $(v_{11},\dots,v_{1n_\ell}),\dots,(v_{\ell 1},\dots,v_{\ell n_\ell})$ Basen von $V_1,\dots,V_\ell$ sind, folgt $c_{11}=\cdots=c_{\ell n_\ell}=0$, was zu zeigen war.

Satz 2 : *Es seien V und W Vektorräume über K.*
Eine Funktion $f: V\to W$ ist genau dann linear, wenn der Graph von f ein Untervektorraum des Produktraums $V\times W$ ist.

Wenn f linear ist und und $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V ist, dann hat der Graph von f die Basis $((v_1,f(v_1)),\dots,(v_n,f(v_n)))$. Insbesondere ist

$$\dim_K(\mathrm{Graph}(f))=\dim_K(V)\,.$$

Beweis: Nach Definition ist $\mathrm{Graph}(f)=\{(v,f(v))\mid v\in V\}\subset V\times W$. Seien $u,w\in V$ und $c\in K$. Wenn f linear ist, dann ist
$0_{V\times W}=(0_V,0_W)=(0_V,f(0_V))\in\mathrm{Graph}(f)$,
$(u,f(u))+(w,f(w))=(u+w,f(u)+f(w))=(u+w,f(u+w))\in\mathrm{Graph}(f)$
und
$c(w,f(w))=(cw,cf(w))=(cw,f(cw))\in\mathrm{Graph}(f)$,
also $\mathrm{Graph}(f)$ ein Untervektorraum von $V\times W$. Wenn umgekehrt $\mathrm{Graph}(f)$ ein Untervektorraum von $V\times W$ ist, dann sind
$(u,f(u))+(w,f(w))=(u+w,f(u)+f(w))\in\mathrm{Graph}(f)$ und
$c(w,f(w))=(cw,cf(w))\in\mathrm{Graph}(f)$, somit
$f(u+w)=f(u)+f(w)$ und $f(cw)=cf(w)$, also f linear.
Wenn f linear ist, dann ist auch die Funktion

$$F: V\to\mathrm{Graph}(f)\,,\, x\mapsto(x,f(x))\,,$$

linear und hat die Umkehrfunktion $\mathrm{Graph}(f)\to V$, $(x,f(x))\mapsto x$. Daher ist F ein Isomorphismus und $(F(v_1),\dots,F(v_n))$ eine Basis von $\mathrm{Graph}(f)$.

Beispiel 3 : Es sei k eine reelle Zahl und f die lineare Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $z\longmapsto kz$. Dann ist

$$\mathrm{Graph(f)}=\{(z,kz)|z\in\mathbb{R}\}=\{z(1,k)|z\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}(1,k)\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

die Gerade durch $(0,0)$ und $(1,k)$.

Beispiel 4 : Es seien a,b reelle Zahlen und g die lineare Funktion $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto ax+by$. Dann ist

$$\text{Graph(g)} = \{(x,y,ax+by)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\} = \{x\cdot(1,0,a)+y\cdot(0,1,b)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\} =$$
$$= \mathbb{R}(1,0,a)+\mathbb{R}(0,1,b) \subseteq \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$$

die Ebene durch $(0,0,0)$, $(1,0,a)$ und $(0,1,b)$.

§2. Bild und Kern einer linearen Funktion

In diesem Abschnitt seien V und W Vektorräume über K und $f:V\longrightarrow W$ eine lineare Funktion.

Definition 5 : Die Menge

$$\text{Bild}(f) := \{f(v)\mid v\in V\} \subseteq W$$

heißt *Bild* von f und die Menge

$$\text{Kern}(f) := \{v\in V\mid f(v)=0_W\} \subseteq V$$

heißt *Kern* von f.

Satz 6 : Bild(f) *ist ein Untervektorraum von* W*,* Kern(f) *ist ein Untervektorraum von* V*.*
Die Dimension des Bildes von f *heißt* Rang von f *(Schreibweise* rg(f)*).*

Beweis: Da f linear ist, ist $0_V\in\text{Kern}(f)$. Für $u,v\in\text{Kern}(f)$ und $c\in K$ folgt aus $f(u+v)=f(u)+f(v)=0_W$ auch $u+v\in\text{Kern}(f)$, sowie aus $f(cu)=cf(u)=0_W$ auch $cu\in\text{Kern}(f)$. Daher ist Kern(f) ein Untervektorraum von V. Analog zeigt man, dass Bild(f) ein Untervektorraum von W ist.

Satz 7 : *Sei* $A\in K^{m\times n}$ *und* $L(A,0):=\{x\in K^{n\times 1}\,|\,Ax=0\}$ *der Lösungsraum des durch* A *definierten Systems homogener linearer Gleichungen. Fasst man die Matrix* A *als lineare Funktion*

$$A: K^{n\times 1}\to K^{m\times 1}\,,\, x\mapsto Ax\,,$$

auf, dann ist Kern$(A)=L(A,0)$ *und* Bild$(A)={}_K\langle A_{-1},\dots,A_{-n}\rangle$*, der Spaltenraum von* A*.*

Beweis: Es ist Kern$(A)=\{x\in K^{n\times 1}\mid Ax=0\}=L(A,0)$ und Bild$(A)=$
$=\{Ax\,|\,x\in K^{n\times 1}\}=\{\sum_{i=1}^n x_iA_{-i}\,|\,x_1,\dots x_n\in K\}={}_K\langle A_{-1},\dots,A_{-n}\rangle$.

Satz 8 : *Seien V,W endlich-dimensionale Vektorräume über K, $f : V \to W$ eine K-lineare Funktion und $r := \mathrm{rg}(f)$. Dann gibt es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V so, dass*

(1) $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ *eine Basis von* $\mathrm{Bild}(f)$ *und*
(2) $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ *eine Basis von* $\mathrm{Kern}(f)$

ist. Insbesondere gilt

$$\dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) + \dim_K(\mathrm{Kern}(f))\,.$$

Ergänzt man die Basis $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ von $\mathrm{Bild}(f)$ *zu einer Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von W, dann ist*

$$D_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

(nur an den Stellen $(1,1), \ldots, (r,r)$ stehen Einsen und sonst Nullen) die Matrix von f bezüglich der Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$.

Beweis: Sei $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Dann kann man Urbilder $v_1, \ldots, v_r \in V$ von $w_1, \ldots, w_r$ unter f wählen. Sei $(u_1, \ldots, u_s)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Dann ist

$$(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s)$$

ein Erzeugendensystem von V, weil für $y \in V$ aus

$$f(y) = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i = \sum_{i=1}^{r} a_i f(v_i) = f(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i)$$

folgt, dass $z := y - \sum_{i=1}^{r} a_i v_i \in \mathrm{Kern}(f)$ ist. Daher ist $y = z + \sum_{i=1}^{r} a_i v_i$ eine Linearkombination von $(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s)$.

Wir zeigen noch, dass $(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s)$ linear unabhängig ist. Seien dazu $c_1, \ldots, c_r, d_1, \ldots, d_s \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} c_i v_i + \sum_{j=1}^{s} d_j u_j = 0\,.$$

Dann ist $0 = f(\sum_{i=1}^{r} c_i v_i + \sum_{j=1}^{s} d_j u_j) = \sum_{i=1}^{r} c_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i w_i$.
Da $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig ist, sind alle c_i gleich 0. Dann ist $\sum_{j=1}^{s} d_j u_j = 0$, und aus der linearen Unabhängigkeit von $u_1, \ldots, u_s$ folgt $d_1 = \cdots = d_s = 0$. Also ist $(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s)$ die gesuchte Basis von V. Insbesondere ist $r + s = n$.

§3. Systeme linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form

Definition 9 : Ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form* ist eine Aufgabe:

- Gegeben sind eine lineare Funktion $f : V \to W$ und ein Vektor $y \in W$.
- Gesucht ist eine „gute Beschreibung" der Menge
$$L(f,y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in V \mid f(x) = y\}$$
aller Vektoren $x \in V$, für die $f(x) = y$ ist.

Die Menge $L(f,y)$ heißt *Lösungsmenge* des durch f und y gegebenen Systems linearer Gleichungen. Ihre Elemente heißen *Lösungen* dieses Systems.

Das durch f und y gegebene System linearer Gleichungen heißt *homogen*, wenn $y = 0_W$ ist, ansonsten *inhomogen*. Die Lösungsmenge eines homogenen Systems linearer Gleichungen ist

$$L(f,0) = \mathrm{Kern}(f) .$$

Satz 10 : *Sei $f : V \to W$ K-linear, $y \in W$ und $z \in L(f,y)$ (insbesondere ist $L(f,y)$ nicht leer). Dann ist*

$$L(f,y) = z + \mathrm{Kern}(f)$$

ein affiner Unterraum von V mit Aufpunkt z und parallelem Untervektorraum $\mathrm{Kern}(f)$.
Das durch f und y gegebene System „lösen" bedeutet daher: finde (irgend)ein Urbild z von y unter f und (irgend)eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.
Falls V endlichdimensional ist, gilt weiters

$$\dim_K(L(f,y)) = \dim_K(V) - \mathrm{rg}(f) .$$

Beweis: Sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann ist $f(z+v) = f(z) + f(v) = y + 0 = y$, also $z + v \in L(f,y)$.

Sei $x \in L(f,y)$. Dann ist $f(x-z) = f(x) - f(z) = y - y = 0$, also $x - z \in \mathrm{Kern}(f)$ und $x = z + (x-z) \in \{z + v \mid v \in \mathrm{Kern}(f)\}$.
Nach Satz 8 ist $\dim_K(\mathrm{Kern}(f)) = \dim_K(V) - \mathrm{rg}(f)$.

Beispiel 11 : Fasst man eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ als eine lineare Funktion

$$f : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1} ,\, x \mapsto Ax ,$$

auf, dann ist $L(f,y) = L(A,y)$.

Beispiel 12 : Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$,
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\}$ und

$$D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) ,\, f \mapsto f' ,$$

wobei f' die Ableitung der Funktion f bezeichnet. Dann sind $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation Vektorräume über $\mathbb{R}$, und die Funktion D ist $\mathbb{R}$-linear. Der Unterraum $\mathrm{Kern}(D)$ besteht aus allen konstanten Funktionen. Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ heißt *Stammfunktion* von $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, wenn $Df = g$ ist. Wenn f eine Stammfunktion von g ist, dann ist die Menge aller Stammfunktionen von g

$$L(D,g) = f + \mathrm{Kern}(D).$$

Beispiel 13: Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$,
$\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 2-mal stetig differenzierbar}\}$, $a,b \in \mathbb{R}$ und

$$D^2 + aD + b : \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\, f \mapsto f'' + af' + bf,$$

wobei f'' die zweite Ableitung der Funktion f bezeichnet. Dann sind $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation Vektorräume über $\mathbb{R}$, und die Funktion $D^2 + aD + b$ ist $\mathbb{R}$-linear. Den Unterraum $\mathrm{Kern}(D^2 + aD + b)$ nennt man *die Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung* $y'' + ay' + by = 0$.
Wenn $f \in L(D^2 + aD + b, g)$ ist, dann ist

$$L(D^2 + aD + b, g) = f + \mathrm{Kern}(D^2 + aD + b).$$

Definition 14: Es sei V ein Vektorraum $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $c \in K^{n\times 1}$ eine Spalte mit n Zeilen.

Wir verwenden im Weiteren die Schreibweise

$$\underline{v}c := \sum_{i=1}^{n} c_i v_i\,.$$

Satz 15: *Seien V,W Vektorräume über K der Dimensionen n,m mit Basen $\underline{v},\underline{w}$, sei $f : V \to W$ K-linear mit Matrix*

$$A := M(f,\underline{v},\underline{w}) \in K^{m\times n}$$

und $y = \underline{w}b \in W$. Dann bildet der Koordinaten-Isomorphismus

$$V \to K^{n\times 1},\, \underline{v}c \mapsto c\,,$$

$L(f,y)$ auf $L(A,b)$ ab und $\mathrm{Kern}(f)$ *auf $L(A,0)$.*

Beweis: Es ist $\underline{v}c \in L(f,y)$ genau dann wenn $\underline{w}(Ac) = \underline{w}b$, also $c \in L(A,b)$ ist.

Nach Satz 15 kann für $f : V \to W$ und $y \in W$ das System linearer Gleichungen (f,y) wie folgt gelöst werden:

(1) Wähle Basen $\underline{v}, \underline{w}$ von V, W.
(2) Berechne die Matrix $A := M(f, \underline{v}, \underline{w})$ und die Koordinatenspalte b von y bezüglich $\underline{w}$.
(3) Berechne die Lösungsmenge $L(A,b)$.
Wenn $L(A,b)$ leer ist, dann ist auch $L(f,y)$ leer.
Wenn $z \in L(A,b)$ und $(u_1, \dots, u_s)$ eine Basis von $L(A,0)$ ist, dann ist $\underline{v}z \in L(f,y)$ und $(\underline{v}u_1, \dots, \underline{v}u_s)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

Im Schulunterricht entsprechen Systeme linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form gewissen „Textaufgaben“.

Beispiel 16: („Interpolation von 3 gegebenen Funktionswerten durch Polynomfunktionen, deren Grad höchstens 4 ist“.) Wir bezeichnen mit x die identische Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und mit 1 die konstante Funktion, die jede reelle Zahl auf 1 abbildet. Man kann zeigen, dass die Potenzfunktionen $1, x, x^2, x^3, x^4$ linear unabhängig sind. Es sei V der von diesen erzeugte Untervektorraum des Vektorraums aller Polynomfunktionen. Wir suchen alle Polynomfunktionen $p \in V$ mit

$$p(-1) = 2, p(1) = 1 \quad \text{und} \quad p(2) = 1\,.$$

Sei $W := \mathbb{R}^3$,

$$f : V \longrightarrow W\,,\ q \longmapsto (q(-1), q(1), q(2))\,,$$

und $y := (2,1,1) \in W$. Die Funktion f („Auswertungsfunktion“) ist linear. Wir wählen die Basis $\underline{v} := (1, x, x^2, x^3, x^4)$ von V und die Standardbasis $\underline{w} := (e_1, e_2, e_3)$ von $W = \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet mit dem Gauß-Verfahren

$$L(A,b) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$L(f,y) = \{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \\ + c(-2 + x + 2x^2 - x^3) + d(-4 + 5x^2 - x^4) \,|\, c, d \in \mathbb{R}\}\,.$$

Satz 17: *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und Z ein affiner Unterraum von V. Dann ist Z die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen, d.h. es gibt eine lineare Funktion*
$f : V \to W$ und einen Vektor $y \in W$ mit

$$Z = L(f, y) .$$

(Dann ist Z durch f und y „in impliziter Form“ *gegeben).*
Wenn der affine Unterraum Z durch einen Aufpunkt p und eine Basis $(u_1, \dots, u_k)$ des parallelen Untervektorraums gegeben ist, dann kann ein solches System linearer Gleichungen auf die folgende Weise berechnet werden:

Ergänze $(u_1, \dots, u_k)$ zu einer Basis $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ von V. Setze

$$f : V \longrightarrow K^{n-k} , \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \longmapsto (c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n)$$

und $y := f(p)$.

Beweis: Seien f und y wie im Satz definiert. Dann ist $\mathrm{Kern}(f) = \,=_K\!< u_1, \dots, u_k >$ und $p \in L(f, y)$. Nach Satz 10 ist $Z = L(f, y)$.

KAPITEL 2

Interpolation und Regression

§1. Interpolationsaufgaben

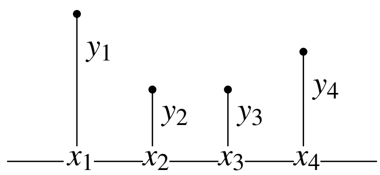
Wir betrachten die folgenden *Interpolationsaufgaben*:
Gegeben sind

- Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,
- paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ und
- reelle Zahlen $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$.

Gesucht sind reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ so, dass die Funktion $f := \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ die Bedingungen

$$f(x_1) = y_1, \ f(x_2) = y_2, \ \ldots, \ f(x_m) = y_m$$

erfüllt.



Durch die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ wird der „Typ“ der Interpolationsaufgabe vorgegeben. Die reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ heißen *Stützstellen*, die reellen Zahlen $y_1, \ldots, y_m$ *(Funktions-)Werte* der Interpolationsaufgabe. Die gesuchte Funktion f heißt *interpolierende Funktion*.

Wir suchen also eine Funktion f des vorgegebenen Typs so, dass die Funktionswerte von f in den Stützstellen die vorgegebenen Werte der Interpolationsaufgabe sind.

Anders formuliert: Wir suchen Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ so, dass

$$\begin{array}{ccc}
f_1(x_1)c_1 + f_2(x_1)c_2 + \ldots + f_n(x_1)c_n & = & y_1 \\
f_1(x_2)c_1 + f_2(x_2)c_2 + \ldots + f_k(x_2)c_n & = & y_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f_1(x_m)c_1 + f_2(x_m)c_2 + \ldots + f_k(x_m)c_n & = & y_m
\end{array}$$

ist. Das ist ein System von n linearen Gleichungen mit m Unbekannten $c_1, \ldots, c_n$. In Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_k(x_1) \\ f_1(x_2) & \ldots & f_k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_m) & \ldots & f_k(x_m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} .$$

Beispiel 18 : („Lineare Interpolation").
Wenn f_1 die konstante Funktion 1 (also die Funktion, die jeder Zahl die Zahl 1 zuordnet) und f_2 die Identität (also die Funktion, die jeder Zahl sich selbst zuordnet) ist, dann suchen wir eine Funktion $f := c_1 f_1 + c_2 f_2$ mit

$$(f(x_i) =)\ c_1 + c_2 x_i = y_i\,,\ 1 \leq i \leq n\,.$$

Die Aufgabe, Zahlen c_1 und c_2 mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 x_1 & = & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 + c_2 x_m & = & y_m \end{array}$$

zu finden, ist ein System von n linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten. In Matrizenform

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\,.$$

Beispiel 19 : (Interpolation durch Polynomfunktionen).
Für $1 \leq i \leq k$ sei $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto z^{i-1}$, die $(i-1)$-te Potenzfunktion. Dann ist die gesuchte Funktion f eine Polynomfunktion
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto c_1 + c_2 z + \ldots + c_n z^{n-1}$.

Wir suchen reelle Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{array}{rcl} c_1 + x_1 c_2 + \ldots + x_1^{k-1} c_n & = & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 + x_m c_2 + \ldots + x_m^{n-1} c_n & = & y_m \end{array}$$

ist, müssen also ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten lösen. In Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & \ldots & x_m^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\,.$$

Ist $m = n = 3$ („Interpolation mit drei Stützstellen durch eine quadratische Funktion "), dann hat diese Interpolationsaufgabe für jede Vorgabe von y_1, y_2, y_3 genau eine Lösung, weil die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (ihre Determinante ist $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$).

§2. Systeme linearer Gleichungen ohne Lösung und Regression

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Das durch A und b gegebene System linearer Gleichungen hat genau dann eine Lösung, wenn es eine Spalte $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit $A \cdot c = b$, also $\sum_{i=1}^{n} c_i A_{-i} = b$, gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn b ein Element des Spaltenraumes von A ist. Wir bezeichnen den Spaltenraum von A mit U, dieser ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{m\times 1}$. Wenn b nicht in U liegt, gibt es keine Lösung.

Ist man der Meinung, dass es eine Lösung geben sollte, aber vielleicht b nicht exakt bestimmt wurde (z.B. durch Runden oder durch Messfehler), kann man b durch $b' \in U$ so ersetzen, dass der Abstand von b zu b' möglichst klein ist. Wählen wir den durch das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{m\times 1}$ definierten Abstand, bedeutet das, dass

$$\sum_{i=1}^{m} (b_i - b_i')^2$$

(„die Summe der Fehlerquadrate“) möglichst klein sein soll. (Für positive reelle Zahlen r und s ist $r \le s$ genau dann, wenn $r^2 \le s^2$ ist. Daher ist Abstand von b zu b' genau dann minimal, wenn sein Quadrat minimal ist). Für b' muss daher der Fußpunkt des Lotes von b auf den Untervektorraum U gewählt werden und dann das Gleichungssystem $A \cdot z = b'$ anstatt von $A \cdot z = b$ gelöst werden.

Hat man das Gleichungssystem durch eine Interpolationsaufgabe wie im vorigen Abschnitt erhalten und gibt es keine Lösung (also keine interpolierende Funktion des vorgegebenen Typs), dann nennt man die Vorgangsweise wie oben „Regression“.

Mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes ist $A_{ij} = f_j(x_i)$ und $b_i = y_i$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Für die gesuchte Funktion $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ soll $f(x_i) = b_i' = y_i'$, $1 \le i \le m$, sein, also der Abstand

$$\|(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m))^T - (y_1, \ldots, y_m)^T\|$$

von der Spalte der „berechneten Funktionswerte“ zur Spalte der „gemessenen Funktionswerte“ möglichst klein sein.

Bei „linearer Interpolation“ ist U die von

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

erzeugte Ebene in $\mathbb{R}^{m\times 1}$. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}' := \text{ Fußpunkt des Lotes von } \mathbf{y} \text{ auf } U\,.$$

Wir berechnen nun $\mathbf{y}'$:

- $\mathbf{y}' = c_2\mathbf{x} + c_1\mathbf{1} \in U$ und
- die Gerade durch $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}'$ steht normal auf der von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{1}$ erzeugten Ebene U.

Also ist

- $\langle c_2\mathbf{x} + c_1\mathbf{1} - \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = 0$ und
- $\langle c_2\mathbf{x} + c_1\mathbf{1} - \mathbf{y}, \mathbf{1}\rangle = 0$.

Daraus erhalten wir das folgende System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten c_1 und c_2:

- $c_2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + c_1\langle \mathbf{1}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$
- $c_2\langle \mathbf{x}, \mathbf{1}\rangle + c_1\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{y}\rangle$

Als Lösung erhalten wir

$$c_2 = \frac{\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle.\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle.\langle \mathbf{1},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle.\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle^2} \quad \text{und} \quad c_1 = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle.\langle \mathbf{1},\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle.\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle.\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle^2}\,.$$

Wenn $\langle -, - \rangle$ das Standard-Skalarprodukt ist, dann ist $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$, $\langle \mathbf{1}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^m x_i$, $\langle \mathbf{1}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^m y_i$, $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = m$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^m x_i^2$ und $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^m y_i^2$, daher

$$c_2 = \frac{m\sum_{i=1}^m x_i y_i - (\sum_{i=1}^m x_i)(\sum_{i=1}^m y_i)}{m\sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}$$

und

$$c_1 = \frac{(\sum_{i=1}^m x_i^2)(\sum_{i=1}^m y_i) - (\sum_{i=1}^m x_i)(\sum_{i=1}^m x_i y_i)}{m\sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}\,.$$

Wir haben damit die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto c_2 z + c_1$, so bestimmt, dass der (euklidische) Abstand vom n-Tupel der gegebenen (gemessenen oder gerundeten) ungenauen Funktionswerte $(y_1, \ldots, y_m)$ zum n-Tupel der berechneten Funktionswerte $(f(x_1), \ldots, f(x_m))$ möglichst klein ist, also $\sum_{i=1}^m (y_i - (c_2 x_i + c_1))^2$ möglichst klein ist. Der Graph dieser Funktion heißt *Regressionsgerade* oder *Trendlinie* der Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$. Man rechnet leicht nach, dass

$$f(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m y_i$$

ist. Das Paar der arithmetischen Mittel von $(x_1, \ldots, x_m)$ und $(y_1, \ldots, y_m)$ liegt also immer auf der Regressionsgeraden.

KAPITEL 3

Mehr über Geometrie

§1. Strahlensatz

Satz 20 : *(„Strahlensatz“)*
Es seien Z_1, Z_2 zwei verschiedene, einander im Punkt 0 schneidende Geraden in V, v_1, v_2 Punkte auf $Z_1 \setminus \{0\}$ und w_1, w_2 Punkte auf $Z_2 \setminus \{0\}$. Dann gibt es c, $d \in K \setminus \{0\}$ so, dass

$$v_2 = cv_1 \quad \textit{und} \quad w_2 = dw_1$$

ist. Mit L_1 bzw. L_2 bezeichnen wir die Geraden durch die Punkte v_1 und w_1 bzw. v_2 und w_2. Dann gilt:

(1) *L_1 und L_2 sind genau dann parallel, wenn $c = d$ ist.*
(2) *Wenn L_1 und L_2 parallel sind, dann ist $v_2 - w_2 = c(v_1 - w_1)$.*

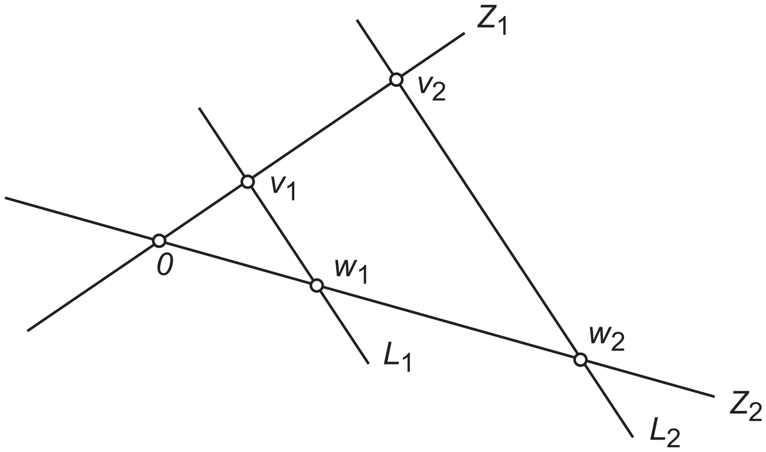


ABBILDUNG 1. Strahlensatz

Beweis:

(1) Der zu L_1 bzw. L_2 parallele Untervektorraum ist $K(v_1 - w_1)$ bzw. $K(cv_1 - dw_1)$. Weil die Geraden Z_1 und Z_2 verschieden sind, sind die Vektoren v_1 und w_1 linear unabhängig. Daher ist $K(v_1 - w_1)$ genau dann gleich $K(cv_1 - dw_1)$, wenn $c = d$ ist.

(2) Wenn L_1 und L_2 parallel sind, ist $c = d$ und

$$v_2 - w_2 = cv_1 - cw_1 = c(v_1 - w_1) \; .$$

Satz 21: *Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K und $Z_1 = p_1 + U_1$, $Z_2 = p_2 + U_2$ affine Unterräume von V mit Aufpunkten p_1, p_2 und parallelen Untervektorräumen U_1, U_2. Wenn Z_1 und Z_2 parallel sind, dann ist $Z_1 \subseteq Z_2$ oder $Z_2 \subseteq Z_1$ oder $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.*

Beweis: Wir nehmen o.E.d.A. an, dass $U_1 \subseteq U_2$ ist. Wenn $Z_1 \cap Z_2$ nicht leer ist, dann gibt es ein $p \in Z_1 \cap Z_2$. Daher ist $Z_1 = p + U_1 \subseteq p + U_2 = Z_2$.

§2. Affine Hülle

Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K.

Definition 22: Es seien I eine endliche Menge und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V. Eine Linearkombination $\sum_{i\in I} c_i v_i$ von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *affine Kombination* von $(v_i)_{i\in I}$, wenn $\sum_{i\in I} c_i = 1$ ist. Die Menge aller affinen Linearkombinationen von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *affine Hülle* von $(v_i)_{i\in I}$.

Beispiel 23: Die affine Hülle von zwei Vektoren v_1 und v_2 ist ein Punkt, wenn $v_1 = v_2$ ist, bzw. die Gerade

$$\{c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \in K, c_1 + c_2 = 1\} = \{v_1 + c(v_2 - v_1) \mid c \in K\},$$

wenn $v_1 \neq v_2$ ist.

Satz 24:

(1) *Es seien M ein affiner Unterraum von V und $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in M. Dann ist die affine Hülle von $(v_i)_{i\in I}$ in M enthalten.*
(2) *Die affine Hülle einer Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V ist ein affiner Unterraum von V. Der dazu parallele Untervektorraum wird von $(v_i - v_j)_{i\in I,\, i\neq j}$ erzeugt, wobei $j \in I$ beliebig gewählt werden kann.*
(3) *Die affine Hülle von $(v_i)_{i\in I}$ ist der (bezüglich Inklusion) kleinste affine Unterraum, der alle v_i, $i \in I$, enthält.*

Beweis:

(1) Sei $p \in M$, U der zu M parallele Untervektorraum und $(c_i)_{i\in I}$ eine Familie in K mit $\sum_{i\in I} c_i = 1$. Zu v_i gibt es $u_i \in U$ so, dass $v_i = p + u_i$,

$i \in I$. Dann ist

$$\sum_{i\in I} c_i v_i = \sum_{i\in I} c_i(p+u_i) = (\sum_{i\in I} c_i)p + \sum_{i\in I} c_i u_i = p + \sum_{i\in I} c_i u_i \in M\,.$$

(2) Sei $j \in I$ und

$$M := v_j + {}_K\langle v_i - v_j;\, i \in I,\, i \neq j\rangle.$$

Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in M und nach (1) ist ihre affine Hülle in M enthalten.
Sei umgekehrt $(d_i)_{i\in I}$ eine Familie in K.
Dann ist

$$v_j + \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} d_i(v_i - v_j) = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} d_i v_i + \left(1 - \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} d_i\right) v_j$$

eine affine Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$. Daher ist jedes Element von M in der affinen Hülle von $(v_i)_{i\in I}$ enthalten.

(3) Folgt aus (1) und (2).

Definition 25 : Affine Unterräume von V heißen *kollinear* bzw. *koplanar*, wenn sie alle in einer Geraden bzw. Ebene in V enthalten sind.

Satz 26 :

(1) *Drei Punkte v_1, v_2, $v_3 \in V$ sind genau dann kollinear, wenn die Vektoren $v_2 - v_1$ und $v_3 - v_1$ linear abhängig sind.*
(2) *Vier Punkte v_1, v_2, v_3, $v_4 \in V$ sind genau dann koplanar, wenn die Vektoren $v_2 - v_1$, $v_3 - v_1$ und $v_4 - v_1$ linear abhängig sind.*
(3) *Zwei Geraden $p_1 + Kv_1$ und $p_2 + Kv_2$ sind genau dann koplanar, wenn die Vektoren $p_1 - p_2$, v_1 und v_2 linear abhängig sind.*

Beweis: Die ersten zwei Aussagen folgen aus Satz 24, (2). Der zur affinen Hülle von $(p_1, p_2, p_1 + v_1, p_2 + v_2)$ parallele Untervektorraum wird von $p_1 - p_2$, v_1 und v_2 erzeugt.

Satz 27 : *Zwei verschiedene koplanare Geraden schneiden einander in genau einem Punkt oder sie sind parallel.*

Beweis: Seien M_1 und M_2 verschiedene koplanare Geraden und E die Ebene, die beide enthält. Wenn M_1 und M_2 nicht parallel sind, dann ist $U_1 \cap U_2 =$

$\{0\}$ und $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ ist der zu E parallele Untervektorraum. Wegen $p_1,\ p_2 \in E$ ist $p_1 - p_2 \in U_1 \oplus U_2$, daher gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$ so, dass $p_1 - p_2 = u_1 + u_2$ ist. Somit ist $M_1 \cap M_2 = \{p_1 - u_1\} = \{p_2 + u_2\}$.

§3. Polytope und Schwerpunkte

Es seien $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ und V ein Vektorraum über K.

Definition 28 : Es seien I eine endliche Menge und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V.
Eine Linearkombination $\sum\limits_{i\in I} c_i v_i$ von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *konvexe Linearkombination* von $(v_i)_{i\in I}$, wenn $\sum\limits_{i\in I} c_i = 1$ und $c_i \geq 0$ für alle $i \in I$ ist.
Die Menge der konvexen Linearkombinationen von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *konvexe Hülle* von $(v_i)_{i\in I}$.
Die konvexe Hülle zweier Vektoren v_1, v_2 heißt *Strecke* zwischen v_1 und v_2.
Die konvexe Hülle dreier nicht kollinearer Punkte v_1, v_2, v_3 heißt *Dreieck* mit Eckpunkten v_1, v_2, v_3 .
Eine Teilmenge von V heißt *Polytop*, wenn sie die konvexe Hülle einer endlichen Familie in V ist.

Es sei $I := \{1, \ldots, n\}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\sum\limits_{i\in I} c_i = 1$. Für $c_n \neq 1$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = (1 - c_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1 - c_n} v_i\right) + c_n v_n = (1 - c_n) w + c_n v_n\,,$$

wobei $w := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1-c_n} v_i$ in der konvexen Hülle H von $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ liegt. Daraus folgt: Für $n \geq 3$ ist die konvexe Hülle von $(v_1, \ldots, v_n)$ die Vereinigung aller Strecken zwischen v_n und den Elementen von H.

Beispiel 29 : Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann ein Polytop, wenn sie ein abgeschlossenes Intervall ist.

Satz 30 : *Es seien P die konvexe Hülle einer Familie* $\left(w_j\right)_{j\in J}$ *in V und* $(v_i)_{i\in I}$ *eine Familie in P. Dann ist die konvexe Hülle von* $(v_i)_{i\in I}$ *in P enthalten.*

Beweis: Für alle $i \in I$ ist der Vektor v_i eine konvexe Linearkombination $\sum\limits_{j\in J} c_{ji} w_j$ von $\left(w_j\right)_{j\in J}$.

Sei $\sum\limits_{i\in I} d_i v_i$ eine konvexe Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$. Dann ist

$$\sum_{i\in I} d_i v_i = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_i c_{ji} w_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} d_i c_{ji}\right) w_j$$

mit $\sum\limits_{i\in I} d_i c_{ji} \geq 0,$ für alle $j \in J$, und

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} d_i c_{ji}\right) = \sum_{i\in I} d_i \left(\sum_{j\in J} c_{ji}\right) = \sum_{i\in I} d_i = 1\ .$$

Daher ist $\sum\limits_{i\in I} d_i v_i \in P$.

Definition 31 : Es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in V .
Der *Schwerpunkt* von $(v_i)_{i\in I}$ ist

$$\frac{1}{\#(I)}\sum_{i\in I} v_i\ .$$

Der Schwerpunkt von (v_1, v_2) heißt *Mittelpunkt der Strecke* zwischen v_1 und v_2.

Satz 32 : *Es seien u, v, w drei nicht kollineare Punkte in V . Die Gerade durch u bzw. v bzw. w und den Mittelpunkt der Strecke zwischen den anderen zwei Punkten heißt* Schwerlinie *des Dreiecks mit Eckpunkten u, v, w durch u bzw. v bzw. w.*
Die drei Schwerlinien sind paarweise verschieden und schneiden einander im Schwerpunkt $\frac{1}{3}(u+v+w)$ von (u, v, w) .

Beweis: Da u, v, w nicht kollinear sind, sind nach Satz 26 die Vektoren $v-u$ und $w-u$ linear unabhängig. Also sind auch

$$v-u \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(v-u)+\frac{1}{2}(w-u) = \frac{1}{2}(v+w)-u$$

linear unabhängig, nach Satz 26 sind daher $u, v, \frac{1}{2}(v+w)$ nicht kollinear. Somit liegt v nicht auf der Schwerlinie durch u . Daher sind die Schwerlinien durch u und durch v verschieden und die drei Schwerlinien haben höchstens einen Schnittpunkt. Wegen

$$\frac{1}{3}(u+v+w) = \frac{1}{3}u+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(v+w)\right) = \frac{1}{3}v+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(u+w)\right) = $$
$$= \frac{1}{3}w+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(u+v)\right)$$

liegt der Schwerpunkt auf allen Schwerlinien.

§4. Affine Räume

Definition 33 : Es seien $(G,\star)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und M eine Menge. Eine Funktion $G\times M \longrightarrow M$, $(s,m)\longmapsto s\cdot m$, ist eine *Operation der Gruppe G auf der Menge M*, wenn gilt:
für alle $m\in M$ ist $e\cdot m = m$ und
für alle $s,t\in G$ und alle $m\in M$ ist $(s\star t)\cdot m = s\cdot(t\cdot m)$.

Beispiel 34 : Die Funktion

$$S_n\times\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\},\ (\sigma,i)\mapsto\sigma(i),$$

ist eine Operation der Permutationsgruppe S_n auf der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$.

Definition 35 : Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, A eine Menge und

$$V\times A\to A,\ (v,a)\mapsto v\cdot a,$$

eine Operation der Gruppe $(V,+)$ auf A. (Also: Für alle $a\in A$, $v,w\in V$ ist $0\cdot a = a$ und $(v+w)\cdot a = v\cdot(w\cdot a)$.
A zusammen mit dieser Operation ist ein *affiner Raum über V*, wenn es für alle Elemente $a,b\in A$ genau einen Vektor $v\in V$ gibt mit $v\cdot a = b$.
Die Elemente von A heißen dann *Punkte*, die Elemente von V *Vektoren* des affinen Raums.

Satz 36 : *Sei A ein affiner Raum über V und $a\in A$. Die Funktion*

$$V\longrightarrow A,\ v\longmapsto v\cdot a,$$

ist bijektiv. (Nach Wahl eines „Nullpunktes“ kann ein affiner Raum als Vektorraum betrachtet werden).

Beweis: Folgt aus der Definition.

Beispiel 37 : Sei V ein Vektorraum, $p\in V$ und U ein Untervektorraum von V. Dann ist der affine Unterraum $p+U$ mit

$$U\times(p+U)\longrightarrow p+U\ \ (v,p+u)\longmapsto p+(u+v),$$

ein affiner Raum über U. Insbesondere ist jeder Vektorraum ein affiner Raum (über sich selbst).

Beispiel 38 : Sie E die Zeichenebene oder der Anschauungsraum und $T(E)$ der Vektorraum der Translationen von E. Dann ist E mit

$$T(E)\times E\longrightarrow E,\ (t,x)\longmapsto t(x),$$

ein affiner Raum über $T(E)$.
Möchte man in der Zeichenebene keinen „Nullpunkt“ wählen, kann man sie als affinen Raum betrachten. Dann muss man zwischen Punkten ($\in E$) und Vektoren ($\in T(E)$) unterscheiden. Punkte können dann nicht addiert werden, aber Vektoren können addiert werden und auf Punkten „wirken“.

Sind P und Q Punkte von E und $P \neq Q$, dann gibt es genau eine Translation in $T(E)$, die P auf Q abbildet. Sie wird häufig mit $\vec{PQ}$ bezeichnet. Die Menge

$$\{t\vec{PQ} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq T(E)$$

ist die Gerade durch $0_{T(E)} = id_E$ und $\vec{PQ}$ in $T(E)$. Die „Gerade durch P und Q in E“ ist dann als

$$\{(t\vec{PQ})(P) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq E$$

definiert. Wegen $(\vec{PQ})(P) = Q$ und $(0 \cdot \vec{PQ})(P) = id_E(P) = P$ sind P und Q Punkte dieser Geraden. Die Translation $\vec{PQ}$ wird als „Richtungsvektor“ dieser Geraden bezeichnet.