Lineare Algebra 1
PS3
WS 2015/16

Blatt 3a, 27. Oktober 2015

1) Es seien m und n positive ganze Zahlen. Berechnen Sie
$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}(3k+1)(2\ell-1) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}(4k-\ell+2).$$
Zeigen Sie: Für $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Q}$ ist
$$\sum_{k=1}^{m}(a_k - a_{k-1}) = a_m - a_0.$$

2) Was ist eine *Matrix*? Beschreiben Sie die folgenden Situationen jeweils durch eine Matrix:
   - Für die Herstellung der Produkte A, B, C, D stehen zwei Maschinen X, Y zur Verfügung. Die Maschine X braucht 7 bzw. 6 bzw. 5 bzw. 8 Sekunden für die Produktion von A bzw. B bzw. C bzw. D; die Maschine Y braucht dafür 5 bzw. 7 bzw. 6 bzw. 7 Sekunden.
     Welche Rechenoperation muss man mit der gesuchten Matrix ausführen, um die gleiche Situation zu beschreiben, wenn aber die Produktionszeiten in Minuten angegeben werden?
   - Es seien a, b, c, d, e Orte, a ist von b 8 km entfernt, d ist von b 11 km entfernt, a ist von c 12 km entfernt, c ist von e 7 km entfernt, c ist von b 8 km entfernt, a ist von e 10 km entfernt, c ist von d 11 km entfernt, d ist von e 7 km entfernt, a ist von d 13 km entfernt, e ist von b 10 km entfernt.
     Welche Rechenoperation muss man mit der gesuchten Matrix ausführen, um die gleiche Situation zu beschreiben, wenn aber die Entfernungen in Englischen Landmeilen
     (1 mile = 1, 609344 km) angegeben werden?

3) [Aus: Pauer,F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon, A.: Mathematik 1. HTL. 2. Auflage, Österreichischer Bundesverlag, Wien 2013.]

Aufgabe 747: Gib die Matrix an.

a. 3×3 *Matrix mit den Koeffizienten* $A_{12} = 4$, $A_{13} = 5$, $A_{22} = 3$, $A_{32} = 7$*; alle übrigen Koeffizienten sind* 0.

b. 3×3 *Matrix mit den Koeffizienten* $A_{ij} = 1$, *wenn* $i = j$, $A_{ij} = 0$, *wenn* $i < j$, *und* $A_{ij} = 2$, *wenn* $i > j$ *ist.*

4) [Aus: Pauer,F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon, A.: Mathematik 2. HTL. 2. Auflage, Österreichischer Bundesverlag, Wien 2013.]

Aufgabe 1128: Ein Händler verkauft vier Produkte an drei Vertriebspartner. Die Anzahl der jeweils verkauften Stück im vergangenen Monat kann der 3×4*-Matrix* V *entnommen werden. Den Verkaufspreis pro Stück der Produkte kann man in der Spalte* P *ablesen.*

$$V := \begin{pmatrix} 200 & 600 & 100 & 300 \\ 50 & 250 & 100 & 100 \\ 300 & 800 & 200 & 450 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 110 \\ 90 \end{pmatrix},$$

a. *Ermittle, an welchen Händler die meisten Stück von Produkt 1 verkauft wurden.*

b. *Gib an, von welchem Produkt insgesamt die geringste Stückzahl verkauft wurde.*

c. *Berechne das Produkt* $V \cdot P$. *Welche Bedeutung hat diese Spalte für den Händler?*

d. *Berechne, wie viel der Händler insgesamt eingenommen hat.*

5) Welche grundlegenden Regeln gelten für das Rechnen mit Matrizen? Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede gibt es zu den Regeln für das Rechnen mit ganzen Zahlen?
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen („binomische Formeln“) richtig sind. Wenn sie nicht richtig sind, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a. Für alle rationalen $n \times n$-Matrizen A, B ist
$A^2 + 2A \cdot B + B^2 = (A + B)^2$.

b. Für alle rationalen $n \times n$-Matrizen A, B ist
$A^2 - 2A \cdot B + B^2 = (A - B)^2$.

c. Für alle rationalen $n \times n$-Matrizen A, B ist
$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$.

6) Wann ist eine Matrix *invertierbar*? Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A die zu C und B die zu D inverse Matrix ist. Berechnen Sie dann die zu $A \cdot B$ und $B \cdot A$ inversen Matrizen.