Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2 bzw. PS3
WS 2015/16

Blatt 8, 7. Dezember 2015

1) Was ist eine *Orthonormalbasis*? Wie können die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Orthonormalbasis berechnet werden?
Wir betrachten das Standardskalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 1}$ aller reellen Spalten mit 2 bzw. 3 Zeilen. Zeigen Sie, dass die Spalten der folgenden Matrizen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 1}$ sind:
$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie die Koordinaten von
$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
bezüglich dieser Orthonormalbasis.

2) Was ist der *Fußpunkt des Lotes* eines Vektors auf einen Untervektorraum bzw. auf einen affinen Unterraum eines euklidischen Raumes? Was ist der *Abstand eines Vektors* von einem Untervektorraum bzw. von einem affinen Unterraum?
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidische Räume.
Berechnen Sie den Fußpunkt des Lotes von $(4,-1)$ auf die Gerade durch die Punkte $(0,0)$ und $(-2,3)$. Berechnen Sie den Abstand dieses Punktes zu dieser Geraden.
Berechnen Sie die Fußpunkte der Lote von $(-2,1,4) \in \mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) auf die affinen Unterräume
$$W := \mathbb{R}(1,2,-1) + \mathbb{R}(2,0,-1) \text{ und } (0,1,1) + W\,.$$
Berechnen Sie die Abstände von $(3,1,-4) \in \mathbb{R}^3$ zu diesen affinen Unterräumen.

3) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und A, B, C drei verschiedene Punkte in V, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Zwei Geraden $P + \mathbb{R}S$ und $Q + \mathbb{R}T$ *sind zueinander orthogonal* oder *stehen zueinander normal*, wenn S und T zueinander orthogonal sind.
Mit a bzw. b bzw. c bezeichnen wir die Gerade durch A bzw. B bzw. C, die normal zur Geraden durch die anderen zwei Punkte steht.
Zeigen Sie: $a \cap b \cap c$ enthält genau einen Punkt.
(„Die Höhenlinien eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkt“).
Hinweis: Sie können annehmen, dass $A = 0$ ist und (B, C) eine Basis von V ist.

4) Erläutern Sie das *Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren* zur Berechnung einer Orthonormalbasis. Berechnen Sie damit Orthonormalbasen des von

$$(-2, 1, 2) \quad \text{und} \quad (3, 3, -1)$$

bzw. von

$$(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0),\ (0, 2, -1, 2) \quad \text{und} \quad (2, 2, 0, -1)$$

erzeugten Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ (mit dem Standardskalarprodukt).

5) Was ist der *Winkel zwischen zwei Halbgeraden*, deren Anfangspunkte gleich sind? Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt.
Sei $A := (2, 4, -2)$ und $B := (1, -3, 1)$. Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}A$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}B$.
Der Winkel zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}C$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}D$ ist $\frac{\pi}{3}$, der Abstand zwischen C und 0 ist 3 und der zwischen D und 0 ist 4. Berechnen Sie den Abstand zwischen C und D.

6) Es sei W der von $\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -1, 2)$ und $\frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten W mit der Einschränkung des Standardskalarproduktes (auf $\mathbb{R}^3$) als euklidischen Raum. Zeigen Sie, dass $(\frac{\sqrt{6}}{6}(1, -1, 2), \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0))$ eine Orthonormalbasis von W ist. Entscheiden Sie mit möglichst wenig Rechenaufwand, ob $(4, -3, 8)$ oder $(5, 4, 2)$ Elemente von W sind. Wenn ja, berechnen Sie deren Koordinaten bezüglich dieser Orthonormalbasis.