Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2 bzw. PS3
WS 2015/16

Blatt 7, 30. November/1. Dezember 2015

1) Wie kann man nach Wahl eines Nullpunktes die Zeichenebene in natürlicher Weise als Vektorraum betrachten? Erläutern Sie dazu, wie die Summe von zwei Punkten und das Produkt eines Punktes mit einer reellen Zahl definiert sind.
Sei E dieser Vektorraum. Was ist eine Gerade in diesem Vektorraum? Wählen Sie drei Punkte A, B, C so, dass je zwei von ihnen eine Basis bilden und zeichnen Sie $(A+B)+C$, $A+(B+C)$, $3A$ und $A-2B$!

2) Was ist ein *affiner Unterraum* eines Vektorraums? Was ist eine Parameterform und was ist eine implizite Form eines affinen Unterraums? Was ist eine *Gerade*, was ist eine *Ebene* in einem Vektorraum?
Es sei G die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(1,-2)$, die zur Geraden durch $(0,0)$ und $(2,3)$ parallel ist. Es sei H die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(2,0)$, die zur Geraden durch $(0,0)$ und $(\frac{1}{2},-1)$ parallel ist. Geben Sie je eine implizite Form von G und H an. Berechnen Sie den Durchschnitt von G und H.

3) Wie kann die Dimension der Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen mit Hilfe des Ranges seiner Koeffizientenmatrix berechnet werden? Wieviele Gleichungen sind für eine implizite Form einer Ebene im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^5$ mindestens nötig? Geben Sie zwei Ebenen im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ an, deren Durchschnitt $\{(0,0,0,0)\}$ ist.
Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene im Vektorraum $\mathbb{R}^4$, welche die 4-Tupel $(0,1,-1,0)$, $(1,2,2,-1)$ und $(2,-1,1,3)$ enthält.

4) G sei eine Gerade und E eine Ebene im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
Der Durchschnitt $G \cap E$ kann leer, ein Punkt oder die Gerade G sein. Erläutern Sie, wie man $G \cap E$ mit möglichst geringem Aufwand berechnet, wenn
(a) G und E in impliziter Form
(b) G und E in Parameterform
(c) G in Parameterform und E in impliziter Form
(d) G in impliziter Form und E in Parameterform
gegeben sind.

5) Was ist ein *Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum*? Was ist ein *euklidischer Raum*? Wie ist das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \; (x, y) \longmapsto 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

ein Skalarprodukt ist. Berechnen Sie bezüglich diesem Skalarprodukt und bezüglich dem Standardskalarprodukt die Skalarprodukte von je zwei der folgenden drei Zahlenpaare:

$$(2, -1),\ (1, 5),\ (-4, 2)\,.$$

Was ist eine *Orthonormalbasis*? Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ (wie oben) an und berechnen Sie die Koordinaten von $(1, 1)$ und $(1, 0)$ bezüglich dieser ON-Basis.

6) Wie ist der *Abstand zwischen zwei Vektoren* in einem Vektorraum mit Skalarprodukt definiert? Wann sind zwei Vektoren *zueinander orthogonal* ?
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie alle Abstände zwischen je zwei der folgenden Vektoren und stellen Sie fest, welche dieser Vektoren zueinander orthogonal sind:

$$(1, 2, -1),\ (0, 1, 2),\ (1, 1, -3),\ (5, -4, 2)\,.$$

Zwei Geraden $P + \mathbb{R}\,S$ und $Q + \mathbb{R}\,T$ *sind zueinander orthogonal* oder *stehen zueinander normal*, wenn das Skalarprodukt von S und T gleich 0 ist. Wir betrachten die Geraden durch die Punkte $(1, 2, -1)$ und $(3, 0, 1)$ bzw. $(2, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ bzw. $(4, 0, 2)$ und $(0, 2, -2)$. Überprüfen Sie, ob zwei dieser drei Geraden zueinander normal stehen.