# Lineare Algebra 1
# SL1 bzw. PS2 bzw. PS3
# WS 2015/16

## Blatt 5, 16./17. November 2015

1) Wann hat eine Matrix *Stufenform*? Welche der folgenden rationalen Matrizen haben Stufenform?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $A$ sei eine rationale Matrix in Stufenform mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten. Begründen Sie:
   - Das $n$-Tupel $(A_{-1}, \ldots, A_{-n})$ der Spalten von $A$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^{m\times 1}$, wenn die letzte Zeile von $A$ nicht nur Nullen enthält.
   - Das $n$-Tupel $(A_{-1}, \ldots, A_{-n})$ der Spalten von $A$ ist genau dann linear unabhängig, wenn in jeder Spalte ein Pivot steht.
   - Das $n$-Tupel $(A_{-1}, \ldots, A_{-n})$ der Spalten von $A$ ist genau dann eine Basis von $\mathbb{Q}^{m\times 1}$, wenn $A$ die Einheitsmatrix ist.

3) $A$ sei eine Matrix in Stufenform. Erläutern Sie, wie man eine Basis von $L(A, 0)$ berechnet. Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix.
   Bestimmen Sie für alle Matrizen $A$ in Aufgabe 1, die Stufenform haben, eine Basis (über $\mathbb{Q}$ ) von $L(A, 0)$.

4) $A$ sei eine Matrix in Stufenform und $(A, b)$ ein System linearer Gleichungen. Wie entscheidet man, ob dieses System eine Lösung hat und - wenn ja - wie schreibt man eine solche an? Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rationale Matrizen. Überprüfen Sie, ob $L(A, b)$ bzw. $L(A, c)$ leer ist oder nicht. Wenn nicht, berechnen Sie irgendein Element davon und eine Basis des rationalen Vektorraums $L(A, 0)$. Schreiben Sie damit die Lösungsmenge $L(A, c)$ an. Wie kann man 100 Lösungen anschreiben?

5) Durch welche (endlich vielen) Daten wird die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen beschrieben? Erläutern Sie den *Gauß-Algorithmus* zur Berechnung dieser Daten. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösungsmenge des durch $(A, b)$ und des durch $(A, c)$ gegebenen Systems linearer Gleichungen.

6) Was ist die zu einer Matrix *inverse Matrix*? Erläutern Sie, wie man überprüft, ob eine Matrix invertierbar ist und - wenn ja - wie man die dazu inverse Matrix berechnet. Überprüfen Sie, ob die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4},$$

invertierbar sind und berechnen Sie - wenn ja - die dazu inverse Matrix.