Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2 bzw. PS3
WS 2015/16

Blatt 4, 9. November 2015

1) Was ist eine *Matrix*? Wie ist die *Addition von Matrizen* definiert? Wie multipliziert man eine rationale Zahl mit einer rationalen Matrix? Berechnen Sie die rationalen Matrizen
$$\frac{-11}{13}A + \frac{444}{555}B \quad \text{und} \quad \frac{2}{5}A - \frac{3}{11}B\,,$$
wobei
$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -\frac{45}{60} & -\frac{57}{19} & -5 \end{pmatrix}$$
ist.

2) Wie ist *das Produkt von zwei Matrizen* definiert? Bilden Sie alle möglichen Produkte von je zwei der folgenden rationalen Matrizen:
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 1 & \frac{-2}{7} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \frac{7}{5} & -2 & -2 \\ \frac{3}{7} & 2 & 5 & \frac{36}{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3) Was ist eine *Elementarmatrix*? Was sind *elementare Zeilenumformungen*? Beschreiben Sie den Zusammenhang von elementaren Zeilenumformungen und Elementarmatrizen.
Berechnen Sie Elementarmatrizen $P, Q, R \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass für alle Matrizen $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ die Matrix PA bzw. QA bzw. AR jene Matrix ist, die man aus A durch
   - Subtraktion der 5-fachen vierten Zeile von A von der ersten Zeile von A erhält bzw.
   - Multiplikation der dritten Zeile von A mit $\frac{2}{9}$ erhält bzw.
   - Vertauschung der zweiten und fünften Spalte von A

erhält.

4) Was ist ein *Vektorraum*? Was ist ein *Untervektorraum* eines Vektorraums? Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ (über $\mathbb{Q}$) aller rationalen 3×3-Matrizen?
$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A \text{ invertierbar } \}\ ,$$

$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \,|\, A_{12} - A_{22} \cdot A_{31} - A_{21} = 0\} \ ,$$
$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \,|\, A_{11} + A_{22} + A_{33} = 1\} \ ,$$
$$\{sE_{12} - tE_{31} + 2uE_{33} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \,|\, s, t, u \in \mathbb{Q}\} \ .$$

(Die Matrizen E_{ij} sind Standardmatrizen).

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{Q}^{4\times 1}$ aller Spalten rationaler Zahlen mit 4 Zeilen?

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \,|\, a + b - c \cdot d = 0 \right\}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \,|\, a + b - 2c - 4d = 0 \right\}$$

5) Was ist eine *Linearkombination* von Vektoren? Schreiben Sie die Linearkombination

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

als Produkt einer Matrix mit einer Spalte. Schreiben Sie das Produkt

$$\begin{pmatrix} 0.12 & 3.45 \\ 6.78 & 9.01 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.40 \\ 5.31 \end{pmatrix}$$

einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der zwei Spalten der Matrix an.

Es seien n eine positive ganze Zahl, $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Spalten in $\mathbb{Q}^{n\times 1}$ und A eine rationale $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine rationale $n \times n$-Matrix B mit $A \cdot B = I_n$, wenn jede der Standard-Spalten $e_1, \ldots, e_n$ eine Linearkombination der Spalten $A_{-1}, \ldots, A_{-n}$ ist.

6) Was ist eine *Basis* eines Vektorraums? Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4 \,|\, x + y + z + w = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^4$ ist. Bestimmen Sie drei verschiedene Basen dieses Untervektorraums. Schreiben Sie die Zeile $(1, -2, 3, -2)$ als Linearkombination jeder dieser drei Basen.