Lineare Algebra 1
PS1 bzw. PS3
WS 2015/16

Blatt 13, 1. Februar 2016

1) Was ist der *Graph* einer Funktion? Welche Eigenschaften hat der Graph einer linearen Funktion? Berechnen Sie jeweils eine Basis der Graphen der folgenden linearen Funktionen und skizzieren Sie diese Graphen:

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto -5z\,,$$

$$b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x + y\,,$$

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ z \mapsto (-z, 2z)\,,$$

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (y, x)\,.$$

2) Berechnen Sie reelle Zahlen k und d so, dass der Abstand zwischen $(3, 5, 4, 2)$ und $(k+d, 2k+d, 3k+d, 4k+d)$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein wird. Erläutern Sie, warum man dafür den Fußpunkt des Lotes von $(3, 5, 4, 2)$ auf der von $(1, 1, 1, 1)$ und $(1, 2, 3, 4)$ erzeugten Ebene berechnet. Warum genügt es, dazu ein System von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten zu lösen? Was bedeutet diese Aufgabe für die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto k \cdot z + d$?

3) Was ist ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form*? Beschreiben Sie die folgende Aufgabe als ein solches System (geben Sie dazu die lineare Funktion und den Vektor im Bildbereich an): Gesucht ist eine quadratische Funktion, deren Funktionswerte an den Stellen -1 bzw. 1 bzw. 3 gleich 6 bzw. 2 bzw. 22 sind. Lösen Sie dann diese Aufgabe!

4) (nur für PS 1) Was ist der *Kern*, was ist das *Bild* einer linearen Funktion? Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\left(w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

eine Basis des Bildes von

$$f : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1},\ x \longmapsto A \cdot x\,,$$

ist. Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis $\underline{w}$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ und bestimmen Sie eine Basis $\underline{v}$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ so, dass die Matrix von f bezüglich der Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge nur 0 und 1 sind.

5) (nur für PS 1) Es sei A dieselbe Matrix wie in Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das durch A und $b := (1, 0, 2)^T$ gegebene System linearer Gleichungen keine Lösung hat. Nehmen Sie an, dass die Einträge von b durch Rundung entstanden sind und dass ohne diese Rundungsfehler eine Lösung existieren würde. Erläutern Sie, wie man b verändern kann, um eine Lösung zu erhalten, die „nahe bei“ der „eigentlichen“ Lösung liegt. Berechnen Sie dann diese Lösung auf zwei Arten: einmal bezüglich dem Standardskalarprodukt und einmal bezüglich einem anderen Skalarprodukt (das Sie wählen können).

6) (nur für PS 1) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c einer quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto a \cdot z^2 + b \cdot z + c$ so, dass der Abstand zwischen $(3, 5, 4, 2)$ und $(f(-2), f(-1), f(1), f(2))$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein wird. Erläutern Sie, warum es genügt, dazu ein System von 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten zu lösen.