Lineare Algebra 1
PS1 bzw. PS2 bzw. PS3
WS 2015/16

Blatt 11, 18. Jänner 2016

1) Was ist eine *Orientierung* eines reellen Vektorraums? Was ist ein *orientierter Vektorraum*? Was ist das *Vektorprodukt* zweier Vektoren in einem dreidimensionalen euklidischen orientierten Raum?
Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei durch die Standardbasis orientiert. Ergänzen Sie $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1))$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Vektorprodukte
$$v := ((2,3,-1) \times (-1,2,3)) \times (-2,1,1)$$
und
$$(2,3,-1) \times ((-1,2,3) \times (-2,1,1)).$$

2) Was ist ein *Parallelotop*, was ist ein *Parallelogramm*? Wie ist das *Volumen eines Parallelotops* definiert? Zeigen Sie: Wenn n Vektoren in einem n-dimensionalen euklidischen Raum ganzzahlige (bzw. rationale) Koordinaten bezüglich einer ON-Basis haben, dann ist das Volumen des von ihnen erzeugten Parallelotops eine ganze (bzw. rationale) Zahl.
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ als mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum. Wählen Sie einen Punkt (a,b) so, dass
$$(2,3), (-1,2), (1,-3), (a,b)$$
die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Wieviele Möglichkeiten gibt es dazu? Berechnen Sie die Fläche dieser Parallelogramme. Wählen Sie dazu das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

3) Berechnen Sie im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt das Volumen des von
$$((1,3,0,4),\ (2,1,-1,3),\ (1,2,-2,1),\ (2,-2,2,1))$$
erzeugten Parallelotops und die Fläche des von $(2,-2,1,3)$ und $(2,1,-1,0)$ erzeugten Parallelogramms.

4) Es seien $v := (2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $w := (1, -2, -2) \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der Standardbasis als orientierten euklidischen Raum. Berechnen Sie $v \times w$, die Fläche des von v und w erzeugten Parallelogramms, den Abstand von $(1, 2, 4)$ zur Ebene, welche die Punkte 0, v und w enthält, und den Sinus des Winkels zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0} v$ und $\mathbb{R}_{\geq 0} w$.

5) Was ist eine *Polynomfunktion* ? Was sind die *Koeffizienten* einer Polynomfunktion? Berechnen Sie die Koeffizienten mit Index 8 und mit Index 9 des Produktes der Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ a \longmapsto 2 + a - 4a^2 - a^5 + 4a^8$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ a \longmapsto 1 + 4a + 2a^3 - 2a^5 - 5a^7 + 3a^{10}\,.$$

6) Was ist eine *lineare Funktion*? Welche der folgenden Funktionen sind linear?

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2\,, a \mapsto a^4 + a^2 + a\,,\\
g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (-z+2)^2 - z^2 - 4\,,\\
h : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}\,, M \mapsto \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} M_{ij}\,,\\
j : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto 3z + 1\,,\\
k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, (a, b) \mapsto (5a - b, 2a + 3b)\,.\\
\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, (m, n) \mapsto (m + n + 1, m - 2n)\,.
\end{aligned}$$