

**Lineare Algebra 1**  
**PS1 bzw. PS2 bzw. PS3**  
**WS 2015/16**

**Blatt 10, 11. Jänner 2016**

- 1) Was ist ein *Eigenwert*, was ist ein *Eigenvektor* einer Matrix? Was ist der *Eigenraum* einer Matrix zum Eigenwert  $c$ ? Überprüfen Sie, ob eine oder mehrere der Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechenden Eigenwerte.

- 2) Wie kann man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix berechnen? Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 3) Es sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix mit Koeffizienten in einem Körper  $K$ . Zeigen Sie:

Genau dann ist 0 ein Eigenwert von  $A$ , wenn  $A$  nicht invertierbar ist.

Wenn  $A$  invertierbar ist und  $c \in K$  ein Eigenwert von  $A$  ist, dann ist  $c^{-1}$  ein Eigenwert von  $A^{-1}$  und die Eigenräume von  $A$  zum Eigenwert  $c$  und von  $A^{-1}$  zum Eigenwert  $c^{-1}$  sind gleich.

Berechnen sie die Eigenwerte und Eigenräume der zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

inversen Matrix.

- 4) Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 5) Was ist eine *Eigenbasis* einer Matrix? Berechnen Sie - wenn möglich - eine Eigenbasis der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{bzw.} \quad M := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Falls  $N$  bzw.  $M$  eine Eigenbasis hat, sei  $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  bzw.  $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  die Matrix, deren Spalten die zwei berechneten Eigenbasisvektoren sind. Berechnen Sie dann  $S^{-1}NS$  bzw.  $T^{-1}MT$ . Berechnen Sie die zweihunderttausendste Potenz der Matrizen  $M$  und  $N$ .

- 6) Was ist eine *komplexe Zahl*? Wie sind *Addition* und *Multiplikation* von komplexen Zahlen definiert? Berechnen Sie reelle Zahlen  $a, b, c, d$  so, dass

$$\left(3 - \frac{2}{5}i\right)^{-1} = a + bi$$

und

$$\left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(2 - \frac{1}{4}i\right) = c + di$$

ist.

Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil aller komplexen Zahlen  $z$  mit der Eigenschaft  $z^2 = -3 - 4i$ .

Berechnen Sie die Eigenwerte in  $\mathbb{C}$  und die entsprechenden Eigenräume ( $\leq \mathbb{C}^{2 \times 1}$ ) der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$