Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

20. bzw. 21. November 2017

1) Für diese Aufgabe brauchen Sie ein Zeichenblatt, einen Bleistift, ein Lineal und ein Dreieck. Was ist eine Zahlengerade? Wählen Sie eine Zahlengerade und zwei von 0 und 1 verschiedene Punkte. Geben Sie an, wie die Summe und das Produkt dieser zwei Punkte definiert sind und zeichnen Sie diese.
   Wie kann man nach Wahl eines Nullpunktes die Zeichenebene in natürlicher Weise als Vektorraum betrachten? Erläutern Sie dazu, wie die Summe von zwei Punkten und das Produkt eines Punktes mit einer reellen Zahl definiert sind.
   Sei E dieser Vektorraum. Was ist eine Gerade in diesem Vektorraum? Wählen Sie drei Punkte P, Q, R so, dass je zwei von ihnen eine Basis bilden und zeichnen Sie $(P + Q) + R$, $P + (Q + R)$, $\frac{1}{3}P$, $Q - R$ und $2P - Q$!

2) Was ist ein *affiner Unterraum* eines Vektorraums? Was ist eine Parameterform und was ist eine implizite Form eines affinen Unterraums? Was ist eine *Gerade*, was ist eine *Ebene* in einem Vektorraum?
   Es sei G die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(-3, 2)$, die zur Geraden durch $(0, 0)$ und $(2, 1)$ parallel ist. Es sei H die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(1, 3)$, die zur Geraden durch $(0, 0)$ und $(2, -1)$ parallel ist. Geben Sie je eine implizite Form von G und H an. Berechnen Sie den Durchschnitt von G und H.

3) Wie kann die Dimension der Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen mit Hilfe des Ranges seiner Koeffizientenmatrix berechnet werden? Wieviele Gleichungen sind für eine implizite Form einer Ebene im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^5$ mindestens nötig? Geben Sie zwei Ebenen im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ an, deren Durchschnitt $\{(0, 0, 0, 0)\}$ ist.
   Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene im Vektorraum $\mathbb{R}^4$, welche die 4-Tupel $(1, 3, -1, 0)$, $(1, 1, 0, -2)$ und $(1, 0, 1, 2)$ enthält.

4) G sei eine Gerade und E eine Ebene im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
Der Durchschnitt $G \cap E$ kann leer, ein Punkt oder die Gerade G sein. Erläutern Sie, wie man $G \cap E$ (mit möglichst geringem Aufwand) berechnet, wenn
(a) G und E in impliziter Form
(b) G und E in Parameterform
(c) G in Parameterform und E in impliziter Form
(d) G in impliziter Form und E in Parameterform
gegeben sind.

Es sei G die Gerade durch $(1, 2, 3)$ und $(0, 1, -1)$ und E die Lösungsmenge der Gleichung $x + y + z = 1$. Berechnen Sie eine implizite Form von G und eine Parameterform von E. Führen Sie dann (a)-(d) für dies Gerade und diese Ebene durch.

5) Was ist ein *Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum*? Was ist ein *euklidischer Raum*? Wie ist das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \; (x, y) \longmapsto 2x_1y_1 + 5x_2y_2$$

ein Skalarprodukt ist. Berechnen Sie bezüglich diesem Skalarprodukt und bezüglich dem Standardskalarprodukt die Skalarprodukte von je zwei der folgenden drei Zahlenpaare:

$$(4, -2), \; (3, 1), \; (-5, -7) \,.$$

6) Wie ist der *Abstand zwischen zwei Vektoren* in einem Vektorraum mit Skalarprodukt definiert? Wann sind zwei Geraden in diesem Vektorraum *zueinander orthogonal* ?
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie alle Abstände zwischen je zwei der folgenden Vektoren.

$$(1, 3, -2), \; (1, -1, 2), \; (2, -1, 3), \; (3, -1, 1) \,.$$

Wir betrachten die Geraden durch die Punkte $(1, 2, 1)$ und $(1, 3, 0)$ bzw. $(2, 2, 1)$ und $(0, -1, 1)$ bzw. $(3, 5, 2)$ und $(-1, 2, -1)$. Überprüfen Sie, ob zwei dieser drei Geraden zueinander normal stehen.