Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

6. bzw. 7. November 2017

1) Wann hat eine Matrix *Stufenform*? Welche der folgenden Matrizen haben Stufenform?
A sei eine Matrix in Stufenform. Erläutern Sie, wie man eine Basis von $L(A,0)$ berechnet. Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix. Bestimmen Sie für alle der folgenden Matrizen, die Stufenform haben, eine Basis des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Systems linearer Gleichungen.

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&-5.1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&7&0&-1&0\\0&0&0&1&3&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

2) M sei eine Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K in Stufenform mit m Zeilen und n Spalten. Begründen Sie:
   - Das n-Tupel $(M_{-1},\dots,M_{-n})$ der Spalten von M ist genau dann ein Erzeugendensystem von $K^{m\times 1}$, wenn die letzte Zeile von M nicht nur Nullen enthält.
   - Das n-Tupel $(M_{-1},\dots,M_{-n})$ der Spalten von M ist genau dann linear unabhängig, wenn in jeder Spalte ein Pivot steht.
   - Das n-Tupel $(M_{-1},\dots,M_{-n})$ der Spalten von M ist genau dann eine Basis von $K^{m\times 1}$, wenn M die Einheitsmatrix (und insbesondere $m=n$) ist.

3) Wie entscheidet man, ob ein System linearer Gleichungen eine Lösung hat und - wenn ja - wie schreibt man eine solche an?

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob $L(A, b)$ bzw. $L(A, c)$ leer ist oder nicht. Wenn nicht, berechnen Sie irgendein Element davon und eine Basis des Vektorraums $L(A, 0)$. Wie kann man 1000 Lösungen dieses Systems linearer Gleichungen anschreiben?

4) Schreiben Sie die folgenden vier Gleichungssysteme I, II, III, IV in Matrizenform (A, b) an und lösen Sie diese, d.h.: beschreiben Sie deren Lösungsmenge durch irgendeine Lösung und eine Basis des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Gleichungssystems. Bei den Gleichungssystemen II und IV sollten Sie dazu keine einzige Rechnung ausführen.

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2\,,$$

$$(II) \quad x_1 + 2x_2 = 1, x_3 - 5x_4 = 2\,,$$

$$(III) \quad 2x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2\,, x_5 = 3\,.$$

$$(IV) \quad u - 3.34v + 9.33w - 11.67x = 1,01\,.$$

5) Wie berechnet man die zu einer quadratischen Matrix *inverse* Matrix? Warum ist jede invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatrizen? Berechnen Sie die zu

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix und stellen Sie diese als Produkt von Elementarmatrizen dar.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind und - wenn ja - berechnen Sie die dazu inverse Matrix.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

6) Beschreiben Sie alle 2×2-Matrizen A in Stufenform und geben Sie jeweils an, für welche Spalten b die Lösungsmenge $L(A, b)$ keine, genau eine oder mehr als eine Lösung hat.

Lösen Sie die Gleichungssysteme

$$2a + 3b = 5,\ 5a - b = -13$$

$$7x - 2y = 5, x - \frac{2}{7}y = 6$$

$$4m - 3n = 9,\ 68m - 51n = 153$$

jeweils zweimal, einmal in der Schreibweise „mit Buchstaben“ und einmal in Matrizenschreibweise. Führen Sie aber in beiden Fällen dieselben elementaren Umformungen durch.