Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

16. bzw. 17. Oktober 2017

1) Wie sind die Wahrheitswerte von durch *und*, *oder* oder *wenn - dann* zusammengesetzten Aussagen festgelegt?
Überprüfen Sie, ob eine der zusammengesetzten Aussagen

$$(A \Rightarrow (B \wedge A)) \vee ((\neg B \vee \neg A) \Rightarrow \neg A)$$

$$(A \vee B) \Rightarrow ((B \wedge A) \vee (\neg B \wedge \neg A))$$

immer wahr ist (unabhängig davon, ob A oder B wahr oder falsch sind).

2) Was versteht man unter der *Zifferndarstellung* einer natürlichen Zahl?
Stellen Sie die Anzahl der Sekunden in einem Tag durch Ziffern zur Basis sechzig, zur Basis zehn und zur Basis zwei dar.

Wie kann man zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung der Größe nach vergleichen? Ordnen Sie die folgenden mit 8 bits dargestellten natürlichen Zahlen der Größe nach an:

$$00011111, 11000001, 10100011, 01111111,$$

$$00111111, 01011100, 11010111, 10000100\ .$$

3) Es seien b eine positive ganze Zahl mit $b \geq 2$ und $z_n, \ldots, z_{-p}$ natürliche Zahlen, die alle kleiner als b sind. Was bedeutet dann $z_n z_{n-1} \ldots z_0.z_{-1} \ldots z_{-p}$?
Es seien b, c, d, p positive ganze Zahlen mit $b \geq 2$. Wie berechnet man natürliche Zahlen $z_n, \ldots, z_{-p}$ mit $0 \leq z_n, \ldots, z_{-p} < b$ so, dass

$$0 \leq \frac{c}{d} - z_n z_{n-1} \ldots z_0.z_{-1} \ldots z_{-p} < b^{-p}$$

ist? Führen Sie das für $b =$ zehn, $c =$ einundvierzig, $d =$ siebenundzwanzig und $p =$ vier aus. Ebenso für $b =$ zwei, $c =$ siebzehn, $d =$ elf, und $p =$ vier.
Berechnen Sie Zähler und Nenner von 76.54 (Darstellung zur Basis zehn), von 43.21 (Darstellung zur Basis fünf) und von 0.011 (Darstellung zur Basis zwei).

4) Was ist ein *kommutativer Ring*, was ist ein *Körper*? Beweisen Sie: Wenn a und b Elemente eines kommutativen Ringes sind, dann ist

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3, \ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Berechnen Sie „im Kopf“ $291^2 - 289^2$.

Zeigen Sie durch Induktion über n: Wenn a und b Elemente eines kommutativen Rings sind und n eine positive natürliche Zahl ist, dann ist

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i\Big).$$

5) Was ist eine *bijektive Funktion*? Es sei M eine endliche Menge und $(a_\ell)_{\ell \in M}$ eine Familie von Elementen eines kommutativen Ringes. Was bedeuten

$$\sum_{\ell \in M} a_\ell \text{ und } \prod_{\ell \in M} a_\ell \,?$$

Es sei $I := \{-4, 2, -3, -1\}$. Stellen Sie mit Hilfe von $\sum$ und $\prod$ die Zahlen dar, die man wie folgt erhält:

a) Jedes Element von I wird mit zwei multipliziert, dann quadriert und dazu zwei addiert. Dann werden diese Zahlen zusammengezählt.

b) Zu jedem Element in I wird 5 addiert und diese Summe durch drei dividiert. Schließlich wird von diesen Zahlen das Produkt gebildet.

Berechnen Sie diese zwei Zahlen und beschreiben Sie genau, was Sie dabei tun!

6) Sei $J := \{5, -1, -2, 2\}$. Die Funktionen f und g von J nach $\mathbb{Q}$ sind durch

$$f(j) := 2j^2 - 1, \ g(j) := 2j + 3, \ \text{(für alle } j \in J),$$

definiert.

Berechnen Sie $\sum_{i \in J} f(i)$, $\prod_{u \in J} f(u)$, $\sum_{abc \in J} g(abc)$ und $\prod_{* \in J} g(*)$.