Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

9. bzw. 10. Oktober 2017

1) Was ist der *Graph einer Funktion* ? Was ist ein n-Tupel, was ist eine *Folge*? Welche der folgenden Funktionen ist ein n-Tupel, welche eine Folge? Schreiben Sie diese in Familienschreibweise an und geben Sie ihre Graphen an.

   $\{1,2,3\} \to \mathbb{N}\,,\ 1 \mapsto 0\,,\ 2 \mapsto 4\,,\ 3 \mapsto 2\,,$

   $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ z \mapsto z^3 + z + 1\,,$

   $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ y \mapsto 7\,,$

   $\{1,2,3,4,5,6\} \to \{Erwin, Hubert, Tijana, Johanna, Werner, Johannes\}\,,$

   $1 \mapsto Johanna\,,\ 2 \mapsto Erwin\,,\ 3 \mapsto Tijana\,,$

   $4 \mapsto Tijana\,,\ 5 \mapsto Werner\,,\ 6 \mapsto Hubert\,.$

2) Berechnen Sie

$$\sum_{j=0}^{5}(j-1)\ ,\qquad \sum_{index=3}^{8} index\ ,\qquad \prod_{r=1}^{3}\Big(\sum_{s=4}^{5}(s-r)\Big)\ ,\qquad \prod_{n=-1}^{3} 5$$

und

$$\sum_{k=0}^{3}\sum_{\ell=1}^{2}(3k+2)\cdot(2\ell+1)\quad .$$

3) Schreiben Sie das Folgende mit Hilfe des Summenzeichens oder Produktzeichens kürzer an:

$$-6+(-4)+(-2)+0+2+4+6+8+10\,,\ 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\,,$$

$$3\cdot 4-3\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 4-4\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 4-5\cdot 5+5\cdot 6$$

4) Was ist eine *rationale Zahl*? Wie sind Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen definiert? Berechnen Sie ganze Zahlen a und b so, dass

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{31}{53} - \frac{64}{27}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{21}{13} + \frac{12}{34}\right)$$

ist. Wie überprüft man, ob zwei rationale Zahlen gleich sind? Sind die zwei rationalen Zahlen

$$\frac{23456789}{789123457} \text{ und } \frac{23456788}{789123455}$$

gleich?

5) Was bedeutet es, eine Behauptung *durch Induktion zu beweisen*? Beweisen Sie durch Induktion:

a) Für jede positive ganze Zahl n ist

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Für jede positive ganze Zahl $n \geq 3$ ist

$$2n^2 > (n+1)^2.$$

6) Beweisen Sie durch Induktion: Für alle positiven ganzen Zahlen n ist

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!) = (n+1)! - 1.$$

Was ist am folgenden „Beweis“ falsch?

Aus einem Haufen schwarzer und brauner Socken, in dem von jeder Farbe gleich viele und jeweils mindestens zwei enthalten sind, werden zwei Socken herausgenommen. Behauptung: Diese zwei Socken haben immer die gleiche Farbe.

Beweis durch Induktion: Wir nehmen an, dass die Behauptung wahr ist, wenn in dem Haufen 2n Socken sind. Wir zeigen sie nun für $2(n+1)$ Socken. Beliebige 2 Socken sind in einem Teilhaufen mit $2n$ Socken enthalten. Nach Induktionsannahme sind deren Farben gleich.