Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

29. bzw. 30. Jänner 2018

1) Was ist ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form*? Wir bezeichnen mit x die identische Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Potenzfunktionen $1 = x^0, x, x^2, x^3$ linear unabhängig sind. Bestimmen Sie dann alle Linearkombinationen f von $1 = x^0, x, x^2, x^3$ mit $f(1) = 2$ und $f(2) = 3$.

2) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das durch A und b gegebene System linearer Gleichungen keine Lösung hat. Nehmen Sie an, dass die Einträge von b durch Rundung entstanden sind und dass ohne diese Rundungsfehler eine Lösung existieren würde. Erläutern Sie, wie man b verändern kann, um eine Lösung zu erhalten, die „nahe bei" der „eigentlichen" Lösung liegt. Wählen Sie dafür ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Warum ist das notwendig?

3) Berechnen Sie eine lineare Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto k \cdot z$, so, dass der Abstand zwischen $(1, 1, 1, 3)$ und $(g(-1), g(1), g(3), g(4))$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein ist. Erläutern Sie, warum es dazu genügt, den Fußpunkt des Lotes von $(1, 1, 1, 3)$ auf die Gerade durch $(0, 0, 0, 0)$ und $(-1, 1, 3, 4)$ zu berechnen. Wählen Sie in der Zeichenebene ein Koordinatensystem und zeichnen Sie den Graphen von f und die Punkte $(-1, 1), (1, 1), (3, 1), (4, 3)$.

4) (Lineare Regression) Berechnen Sie reelle Zahlen k, d so, dass für die Funktion
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto k \cdot z + d$, der Abstand zwischen
$(3, 3, 1, 0)$ und $(f(1), f(2), f(3), f(4))$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein ist. Erläutern Sie, warum es genügt, dazu ein System von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten zu lösen. Wählen Sie in der Zeichenebene ein Koordinatensystem und zeichnen Sie den Graphen von f und die Punkte
$(1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 0)$.

5) (Quadratische Regression) Berechnen Sie reelle Zahlen a, b und c so, dass der Abstand zwischen $(3, 5, 4, 2)$ und

$$(a + b + c, 4a + 2b + c, 9a + 3b + c, 16a + 4b + c)$$

in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein wird.
Erläutern Sie, warum man dafür den Fußpunkt des Lotes von $(3, 5, 4, 2)$ auf den von $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$ und $(1, 4, 9, 16)$ erzeugten Untervektorraum berechnet. Warum genügt es, dazu ein System von 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten zu lösen?

6) Erläutern Sie, warum man mit der Lösung von Aufgabe 5 auch die Lösung der Aufgabe:
„Finde eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto a.z^2 + b.z + c$$

so, dass die *Summe der Fehlerquadrate*

$$(f(1) - 3)^2 + (f(2) - 5)^2 + (f(3) - 4)^2 + (f(4) - 2)^2$$

möglichst klein ist.“
erhält.