Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

22. bzw. 23. Jänner 2018

1) Was ist der *Graph* einer Funktion? Was ist eine *lineare Funktion*? Welche Eigenschaften hat der Graph einer linearen Funktion? Berechnen Sie jeweils eine Basis der Graphen der folgenden linearen Funktionen und skizzieren Sie diese Graphen:

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto 4z\,,$$
$$b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto -2x + 5y\,,$$
$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ w \mapsto (-3w, -2w)\,,$$
$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (-y, x)\,.$$

2) Was ist eine *Gerade* in einem Vektorraum? Was ist der *Kern* einer linearen Funktion? Was ist das Urbild eines Elementes (im Bildbereich einer Funktion f) bezüglich f?
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s \mapsto -3s + 4\,,$$

eine Gerade im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist. Geben Sie eine Parameterform und eine implizite Form dieser Geraden an. Die dazu parallele Gerade durch $(0,0)$ ist der Kern einer linearen Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese Funktion und berechnen sie bezüglich ihr das Urbild von 2.

Geben Sie eine Parameterform und eine implizite Form der Geraden durch die Punkte $(-2,3)$ und $(-2,5)$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ an. Zeigen Sie, dass diese Gerade nicht der Graph einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sein kann.

3) Was ist das *Bild* einer Funktion? Welche Eigenschaften haben Kern und Bild einer linearen Funktion? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Dimensionen des Definitionsbereichs, des Kerns und des Bildes einer linearen Funktion? Was ist die *Matrix einer linearen Funktion*?

Berechnen Sie Basen des Kerns und des Bildes der linearen Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (4x - y + z, -3x + 3y + z, x + 2y + 2z)\,.$$

Skizzieren Sie diese zwei Mengen. Ergänzen Sie die berechnete Basis des Kerns durch Urbilder der berechneten Basisvektoren des Bildes zu einer Basis des Definitionsbereiches und die Basis des Bildes zu einer Basis des Bildbereiches. Bestimmen Sie dann die Matrix von f bezüglich dieser Basen.

4) Zeigen Sie, dass der Rang der linearen Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto A \cdot x\,,$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

gleich 1 ist. Berechnen Sie eine Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$ so, dass $f(v_1)$ eine Basis des Bildes von f und (v_2, v_3) eine Basis des Kerns von f ist. Ergänzen Sie $f(v_1)$ zu einer Basis des Bildbereiches $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie dann die Matrix von f bezüglich dieser Basen.

5) Was ist ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form*? Beschreiben Sie die folgende Aufgabe als ein solches System (geben Sie dazu die lineare Funktion und den Vektor im Bildbereich an): Gesucht ist eine quadratische Funktion, deren Funktionswerte an den Stellen -1 bzw. 2 bzw. 3 gleich 3 bzw. 2 bzw. 4 sind. Lösen Sie dann diese Aufgabe!

6) Geben Sie je eine lineare Funktione von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ an,
a) deren Bild die Dimension zwei hat,
b) deren Bild die Dimension drei hat,
c) deren Bild die Dimension eins hat,
d) deren Bild die Dimension null hat.

Welche Dimension hat dann jeweils der Kern? Berechnen Sie Basen der Kerne der linearen Funktionen, die Sie in in a)-d) angegeben haben.