Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

15. bzw. 16. Jänner 2018

1) Was ist eine *lineare Funktion*? Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R}$-linear sind.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \, , (a, b) \mapsto (-b, a) \, .$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \, z \mapsto (-z + 3)^2 - z^2 - 9 \, ,$$
$$h : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R} \, , A \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} A_{ii} \, ,$$
$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \, z \mapsto 2z + 5 \, ,$$
$$k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \, , (a, b, c) \mapsto (5a - b + c, 2a + 3b - 4c) \, ,$$
$$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \, , t \mapsto (-t, 5t, 2t) \, ,$$
$$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \, , t \mapsto (t, t^2) \, .$$

2) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ordnet jedem Paar (a, b) das Paar (Preis in Euro von a kg Salz und b kg Zucker im Geschäft X, Preis in Euro von a kg Salz und b kg Zucker im Geschäft Y) zu. Erläutern Sie, welche Bedingungen die Preisgestaltung in den Geschäften X und Y erfüllen muss, damit f linear ist.

   Wir nehmen nun an, dass f linear ist. Frau Huber hat für 3 kg Zucker und 2 kg Salz im Geschäft X 5,10 Euro und im Geschäft Y 5,20 Euro bezahlt, Herr Schmid für 4 kg Zucker und 1 kg Salz im Geschäft X 5,30 Euro und im Geschäft Y 5,10 Euro. Berechnen Sie $f(1, 1)$.

   Erklären Sie, warum die Aufgabe nicht lösbar wäre, wenn Herr Schmid 1,5 kg Zucker und 1 kg Salz gekauft hätte. Welche Bedingung müssen die Einkäufe von Frau Huber und Herrn Schmid erfüllen, dass daraus für alle Paare (a, b) der Funktionswert $f(a, b)$ berechnet werden kann?

3) Was ist ein *Isomorphismus von Vektorräumen*?
Es sei G die Gerade durch $(0,0,0)$ und $(2,2,-1)$ in $\mathbb{R}^3$ und E die Ebene durch $(0,0,0)$, $(1,1,2)$ und $(0,2,1)$ in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Funktion p von $\mathbb{R}^3$ nach E, die jedem Tripel (a,b,c) den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden $(a,b,c)+G$ zuordnet, linear ist. Kann man das geometrisch interpretieren? Zeigen Sie, dass das Bild einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ unter p eine Gerade oder ein Punkt in E ist.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$q : \{(x,y,0)|x,y \in \mathbb{R}\} \longrightarrow E,\ (x,y,0) \longmapsto p(x,y,0)$$

ein Isomorphismus ist.

4) Wie ist die *Matrix einer linearen Funktion* definiert? Was ist ein *Isomorphismus* von Vektorräumen? Es seien

$$\underline{v} := (v_1,v_2) := ((434,798,-153),(731,-45,9999)) \in (\mathbb{R}^3)^2\ ,$$

$$\underline{w} := (w_1,w_2) := ((3342,\frac{167}{374},-847),(145,719,385)) \in (\mathbb{R}^3)^2\ ,$$

V bzw. W die von $\underline{v}$ bzw. $\underline{w}$ erzeugten Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ und $f : V \longrightarrow W$ die lineare Funktion mit
$f(v_1) = 2w_1 + w_2$ und $f(v_2) = 3w_1 - w_2$. Berechnen Sie die Matrix von f bezüglich der Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f ein Isomorphismus ist und berechnen Sie die Matrix ihrer Umkehrfunktion bezüglich der Basen $\underline{w}$ und $\underline{v}$.

5) Wir betrachten den Körper $\mathbb{C}$ sowohl als eindimensionalen komplexen Vektorraum als auch als zweidimensionalen reellen Vektorraum. Es sei $a \neq 0$ eine komplexe Zahl und g_a die Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$, die jeder komplexen Zahl ihr Produkt mit a zuordnet. Zeigen Sie, dass g_a sowohl $\mathbb{R}$-linear als auch $\mathbb{C}$-linear ist. Bestimmen Sie die reelle 2×2- Matrix von g_i und von g_{2+3i} (jeweils als $\mathbb{R}$-lineare Funktion betrachtet) bezüglich der Basis $(1,i)$. Bestimmen Sie die komplexe 1×1-Matrix von g_i und g_{2+3i} (jeweils als $\mathbb{C}$-lineare Funktion betrachtet) bezüglich der Basis i.

Berechnen Sie dann die Matrizen der zwei $\mathbb{R}$-linearen Funktionen g_{2+3i} und g_i bezüglich der Basis $(1+i,-1+i)$.

Geben Sie eine geometrische Interpretation der Funktion g_i („Multiplikation mit i“) an!

6) Was ist ein *Eigenvektor, Eigenwert, Eigenraum* einer linearen Funktion?
Für $i \in \mathbb{N}$ sei $x^i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, t \longmapsto t^i$, die „i-te Potenzfunktion“. Die Funktionen $x^0 =: 1, x, x^2, \ldots, x^n$ sind linear unabhängig. Mit V bezeichnen wir den von $1, x, x^2, \ldots, x^n$ erzeugten Vektorraum („Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$“) und mit D die Funktion von V nach V mit

$$D(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} i c_i x^{i-1}$$

(„Differentiation“). Zeigen Sie, dass D linear ist. Berechnen Sie die Matrix von D bezüglich der Basis $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ von V. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von D.