Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

8. bzw. 9. Jänner 2018

1) Was ist ein *Eigenwert*, was ist ein *Eigenvektor* einer Matrix? Was ist der *Eigenraum* einer Matrix zum Eigenwert c? Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K.
   Zeigen Sie:
   Genau dann ist 0 ein Eigenwert von A, wenn A nicht invertierbar ist.
   Welche Dimension hat der Eigenraum zum Eigenwert 0 einer 7×7-Matrix mit Rang 4?
   Zeigen Sie: Wenn A invertierbar ist und $c \in K$ ein Eigenwert von A ist, dann ist c^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} und die Eigenräume von A zum Eigenwert c und von A^{-1} zum Eigenwert c^{-1} sind gleich.
   Berechnen sie die Eigenwerte und Eigenräume der zu
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   inversen Matrix.

2) Was ist eine *Eigenbasis* einer Matrix? Berechnen Sie - wenn möglich - eine Eigenbasis der Matrix
   $$N := \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{bzw.} \quad M := \begin{pmatrix} \frac{13}{25} & \frac{7}{50} \\ -\frac{2}{75} & \frac{47}{150} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
   Falls N bzw. M eine Eigenbasis hat, sei $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix, deren Spalten die zwei berechneten Eigenbasisvektoren sind. Berechnen Sie dann $S^{-1}NS$ bzw. $T^{-1}MT$. Berechnen Sie die neunte und die zehntausendste Potenz der Matrizen M und N.

3) Was ist eine *komplexe Zahl*? Was ist der Realteil und was der Imaginärteil einer komplexen Zahl? Wie sind *Addition* und *Multiplikation* von komplexen Zahlen definiert? Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von
   $$(3 - \frac{3}{4}i)^{-1}$$
   und von
   $$(2 + 4i)^2 \cdot (4 - 5i) \ .$$

Berechnen Sie die Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und die entsprechenden Eigenräume ($\leq \mathbb{C}^{2\times 1}$) der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Was ist ein *Parallelotop*, was ist ein *Parallelogramm*? Wie ist das *Volumen eines Parallelotops* definiert?
Zeigen Sie: Wenn n Vektoren in einem n-dimensionalen euklidischen Raum ganzzahlige Koordinaten bezüglich einer ON-Basis haben, dann ist auch das Volumen des von ihnen erzeugten Parallelotops eine ganze Zahl.
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von $(1, -10, 4)$ und $(\frac{1}{2}, 3, -2)$ erzeugten Parallelogramms und das Volumen des von $(3, 2, 1)$, $(0, 1, 1)$ und $(2, -1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.
Berechnen Sie im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt das Volumen des von

$$((1, 3, 0, 4),\ (2, 1, -1, 3),\ (1, 2, -2, 1),\ (2, -2, 2, 1))$$

erzeugten Parallelotops und den Flächeninhalt des von $(2, -2, 1, 3)$ und $(2, 1, -1, 0)$ erzeugten Parallelogramms.

5) Was ist eine *Orientierung* eines reellen Vektorraums? Was ist ein *orientierter Vektorraum*? Wie ist das *Vektorprodukt* zweier Vektoren in einem dreidimensionalen orientierten euklidischen Raum definiert?
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der durch die Standardbasis gegebenen Orientierung als orientierten euklidischen Raum.
Es seien $v := (2, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $w := (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $v \times w$, $w \times v$, den Flächeninhalt des von v und w erzeugten Parallelogramms und den Abstand von $(1, 0, -3)$ zur Ebene, welche die Punkte 0, v und w enthält. Ergänzen Sie $(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1))$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Vektorprodukte

$$((2, 4, -1) \times (-1, 2, 3)) \times (-2, 1, 1)$$

und

$$(2, 4, -1) \times ((-1, 2, 3) \times (-2, 1, 1)).$$

6) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum. Wählen Sie einen Punkt (a, b) so, dass

$$(1, 3), (-1, 2), (1, -3), (a, b)$$

die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Wieviele Möglichkeiten gibt es dazu? Berechnen Sie die Flächeninhalte dieser Parallelogramme.