Proseminar Lineare Algebra

WS 2017/18

4. bzw. 5. Dezember 2017

1) Wie ist die *Hintereinanderausführung von Funktionen* definiert? Was ist eine *bijektive Funktion*? Was ist die *Umkehrfunktion* einer bijektiven Funktion?

   Es seien
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Überprüfen Sie, ob die Funktionen
$$f : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\; z \longmapsto A \cdot z\,,$$
   und
$$g : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\; z \longmapsto B \cdot z\,,$$
   bijektiv sind. Wenn ja, ermitteln Sie deren Umkehrfunktionen. Beschreiben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ sowie - falls f oder g bijektiv sind - deren Umkehrfunktionen.

   Schreiben Sie die Funktion
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; (a, b) \longmapsto a^2 - b^2\,,$$
   auf zwei verschiedene Arten als Zusammensetzung einer Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ mit einer von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an.

2) Sei V ein Vektorraum. Was ist eine *Translation* in V? Wie sind die Addition und die Skalarmultiplikation im Vektorraum aller Translationen von V definiert? Was ist ein *Pfeil* in V?
   Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und wählen Sie eine Basis (P, Q) dieses Vektoraums.
   Die Translationen s und t sind durch $s(Q) = Q - 2P$ und $t(Q) = P$ definiert. Skizzieren Sie die Graphen von s, t und $s \circ t$, indem Sie einige Elemente dieser Graphen in die Ebene zeichnen.
   Bilden die Translationen s und t eine Basis des Vektorraums aller Translationen der Ebene? Wenn ja, berechnen Sie die Koordinatenspalte der Translation r, die durch $r(0) = P$ definiert ist, bezüglich dieser Basis.

3) Was ist eine *Permutation*? Wie ist die *Hintereinanderausführung* von Permutationen definiert? Was ist ein *Zykel*? Was ist das *Vorzeichen* einer Permutation? Wie kann das Vorzeichen einer Permutation berechnet werden? Es seien

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen. Berechnen Sie $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1} und $g^2 := g \circ g$. Zerlegen Sie f und g in ein Produkt von disjunkten Zykeln. Berechnen Sie das Vorzeichen dieser Permutationen. Zerlegen Sie f und g in ein Produkt von Transpositionen.

4) Beweisen Sie: Jede Transposition in S_n kann als Produkt von Transpositionen der Form $(i \;\; i+1)$ mit $1 \leq i < n$ geschrieben werden. Hinweis: $(13) = (12)(23)(12)$.
Folgern Sie daraus: Jede Umordnung in einem Bücherregal kann erreicht werden, indem man mehrfach zwei benachbarte Bücher vertauscht.

5) Wie sind die *punktweise Addition* und die *punktweise Multiplikation* von Funktionen mit Bildbereich $\mathbb{R}$ definiert? Welche Rechenregeln gelten für diese Rechenoperationen?
Die Funktionen f, g, h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ seien durch

$$f(x) := |x| + x \;,\; g(x) := 3x - 3|x| \;,\; h(x) := 5x|x| - 4x^2 \;,\; x \in \mathbb{R},$$

definiert. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$(f - g)^2 = f^2 + g^2\,;$
$9f^2 - g^2 = 2h\,;$
$(f + g)^3 = f^3 + 77f^2 \cdot g + g^3\,;$
$(f \cdot h - g)^2 = h^2 + g\,;$
$f + g \cdot h = h + g \cdot f$.

6) Was ist eine *Polynomfunktion*? Berechnen Sie die den Funktionswert der Polynomfunktion
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto z^8 + 3z^7 - z^6 - 7z^5 + 2z^3 - 8z^2 + 4z - 7$
an der Stelle 3 so, dass möglichst wenig Multiplikationen nötig sind.

Berechnen Sie mit möglichst geringem Rechenaufwand die Koeffizienten mit Index 5 und mit Index 6 der Polynomfunktion $f \cdot g$, wobei g die Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $g(t) = 2t^2 - 5t + 1$ ist.