Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

30. Jänner 2017

1) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das durch A und b gegebene System linearer Gleichungen keine Lösung hat. Nehmen Sie an, dass die Einträge von b durch Rundung entstanden sind und dass ohne diese Rundungsfehler eine Lösung existieren würde. Erläutern Sie, wie man b verändern kann, um eine Lösung zu erhalten, die „nahe bei" der „eigentlichen" Lösung liegt. Berechnen Sie dann diese Lösung auf zwei Arten: einmal bezüglich dem Standardskalarprodukt und einmal bezüglich einem anderen Skalarprodukt (das Sie wählen können).

2) Berechnen Sie eine lineare Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto k \cdot z$, so, dass der Abstand zwischen $(1, 2, 1, 3)$ und $(g(-1), g(1), g(3), g(4))$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein ist. Erläutern Sie, warum es dazu genügt, den Fußpunkt des Lotes von $(1, 2, 1, 3)$ auf die Gerade durch $(0, 0, 0, 0)$ und $(-1, 1, 3, 4)$ zu berechnen. Wählen Sie in der Zeichenebene ein Koordinatensystem und zeichnen Sie den Graphen von f und die Punkte $(-1, 1), (1, 2), (3, 1), (4, 3)$.

3) (Lineare Regression) Berechnen Sie reelle Zahlen k, d so, dass für die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto k \cdot z + d$, der Abstand zwischen $(3, 3, 1, 0)$ und $(f(1), f(2), f(3), f(4))$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein ist. Erläutern Sie, warum es genügt, dazu ein System von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten zu lösen. Wählen Sie in der Zeichenebene ein Koordinatensystem und zeichnen Sie den Graphen von f und die Punkte $(1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 0)$.

4) (Quadratische Regression) Berechnen Sie reelle Zahlen a, b und c so, dass der Abstand zwischen $(3,5,4,2)$ und

$$(a+b+c, 4a+2b+c, 9a+3b+c, 16a+4b+c)$$

in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein wird. Erläutern Sie, warum man dafür den Fußpunkt des Lotes von $(3,5,4,2)$ auf den von $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$ und $(1,4,9,16)$ erzeugten Untervektorraum berechnet. Warum genügt es, dazu ein System von 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten zu lösen? Warum erhält man mit der Lösung dieser Aufgabe auch die Lösung der Aufgabe: Finde eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto a.z^2 + b.z + c$$

so, dass die „Summe der Fehlerquadrate“

$$(f(1)-3)^2 + (f(2)-5)^2 + (f(3)-4)^2 + (f(4)-2)^2$$

möglichst klein ist.

5) Wann sind drei Punkte *kollinear*?
Es seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte in der Zeichenebene. Beschreiben Sie alle Punkte D in der Zeichenebene so, dass die vier Punkte A, B, C, D ein Parallelogramm bilden.
Betrachten Sie dazu die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und beschreiben Sie die gesuchten Punkte als Summen oder Differenzen von A, B, C.
Zeigen Sie, dass in einem Parallelogramm, in dem A und C einander gegenüberliegen, die „Streckenmittelpunkte“ $\frac{1}{2}(A+C)$ und $\frac{1}{2}(B+D)$ der zwei Diagonalen gleich sind.

6) Was ist die *affine Hülle* einer Familie von Vektoren? Wann sind drei Punkte *koplanar*? Überprüfen Sie, ob die vier Punkte

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ koplanar sind. Berechnen Sie den Durchschnitt der affinen Hülle von (v_1, v_2, v_3) und der affinen Hülle von (v_1, v_4, v_3). Berechnen Sie den Durchschnitt der affinen Hülle von (v_1, v_2) und der affinen Hülle von (v_4, v_3).