Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

23. Jänner 2017

1) Was ist der *Graph* einer Funktion? Was ist eine *lineare Funktion*? Welche Eigenschaften hat der Graph einer linearen Funktion? Berechnen Sie jeweils eine Basis der Graphen der folgenden linearen Funktionen und skizzieren Sie diese Graphen:

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto -3z\,,$$
$$b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + 3y\,,$$
$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ z \mapsto (-2z, 3z)\,,$$
$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (y, x)\,.$$

2) Was ist eine *Gerade* in einem Vektorraum? Was ist der *Kern* einer linearen Funktion? Was ist das Urbild eines Elementes (im Bildbereich einer Funktion f) bezüglich f?
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto 2t + 1\,,$$

eine Gerade im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist. Die dazu parallele Gerade durch $(0, 0)$ ist der Kern einer linearen Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese Funktion und berechnen sie bezüglich ihr das Urbild von 1.

3) Was ist das *Bild* einer Funktion? Welche Eigenschaften haben Kern und Bild einer linearen Funktion? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Dimensionen des Definitionsbereichs, des Kerns und des Bildes einer linearen Funktion? Was ist die *Matrix einer linearen Funktion*?
Berechnen Sie Basen des Kerns und des Bildes der linearen Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (3x - y, -6x + 2y)\,.$$

Zeichnen Sie diese zwei Mengen. Ergänzen Sie die berechnete Basis des Kerns durch Urbilder der berechneten Basisvektoren des Bildes zu einer Basis des Definitionsbereiches und die Basis des Bildes zu einer Basis des Bildbereiches. Bestimmen Sie dann die Matrix von f bezüglich dieser Basen.

4) Zeigen Sie, dass der Rang der linearen Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\, x \mapsto A \cdot x\,,$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

gleich 1 ist. Berechnen Sie eine Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$ so, dass $f(v_1)$ eine Basis des Bildes von f und (v_2, v_3) eine Basis des Kerns von f ist. Ergänzen Sie $f(v_1)$ zu einer Basis des Bildbereiches $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie dann die Matrix von f bezüglich dieser Basen.

5) Was ist ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form*? Beschreiben Sie die folgende Aufgabe als ein solches System (geben Sie dazu die lineare Funktion und den Vektor im Bildbereich an): Gesucht ist eine quadratische Funktion, deren Funktionswerte an den Stellen -1 bzw. 1 bzw. 3 gleich 4 bzw. 2 bzw. 8 sind. Lösen Sie dann diese Aufgabe!

6) Geben Sie lineare Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$,
a) deren Bild die Dimension zwei und deren Kern die Dimension eins hat,
b) deren Bild die Dimension drei und deren Kern die Dimension null hat,
c) deren Bild die Dimension eins und deren Kern die Dimension zwei hat,
d) deren Bild die Dimension null und deren Kern die Dimension drei hat,
an.

Warum wurde nicht nach einer linearen Funktion gefragt, deren Kern und deren Bild die Dimension zwei haben?