Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

28. November 2016

1) Was ist eine *Gerade*, was ist eine *Ebene* in einem Vektorraum? Wann sind zwei affine Unterräume *parallel*? Zeigen Sie:
Die Urbilder von 3 und von 4 bezüglich
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b) \longmapsto 4a - b + 1$ sind parallele Geraden.
Die Urbilder von 3 und von 4 bezüglich
$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b,c) \longmapsto 4a - b + c - 5$ sind parallele Ebenen.

2) Was ist ein *Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum*? Was ist ein *euklidischer Raum*? Wie ist das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ (x, y) \longmapsto 3x_1y_1 + 2x_2y_2$$

ein Skalarprodukt ist. Berechnen Sie bezüglich diesem Skalarprodukt und bezüglich dem Standardskalarprodukt die Skalarprodukte von je zwei der folgenden drei Zahlenpaare:

$$(3, -1),\ (2, 6),\ (-3, 4)\,.$$

3) Wie ist der *Abstand zwischen zwei Vektoren* in einem Vektorraum mit Skalarprodukt definiert? Wann sind zwei Geraden in diesem Vektorraum *zueinander orthogonal* ?
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie alle Abstände zwischen je zwei der folgenden Vektoren.

$$(1, 2, -2),\ (1, 0, 2),\ (2, -1, 0),\ (3, -5, 1)\,.$$

Wir betrachten die Geraden durch die Punkte $(2, 2, -1)$ und $(1, 2, 0)$ bzw. $(2, 1, 1)$ und $(0, 3, 1)$ bzw. $(3, 1, 2)$ und $(2, 1, 1)$. Überprüfen Sie, ob zwei dieser drei Geraden zueinander normal stehen.

4) Was ist eine *Orthonormalbasis*? Wie werden die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Orthonormalbasis berechnet ?
Wir betrachten das Standardskalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times1}$ aller reellen Spalten mit 2 bzw. 3 Zeilen. Zeigen Sie, dass die Spalten der folgenden Matrizen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2\times1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times1}$ sind:

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Orthonormalbasis.

5) Was ist der *Fußpunkt des Lotes* eines Vektors auf einen Untervektorraum eines euklidischen Raumes? Was ist der *Abstand eines Vektors* von einem Untervektorraum ?
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidische Räume.
Berechnen Sie den Fußpunkt des Lotes von $(4,-3)$ auf die Gerade durch die Punkte $(0,0)$ und $(-2,3)$. Berechnen Sie den Abstand dieses Punktes zu dieser Geraden.
Berechnen Sie die Fußpunkte der Lote von $(-2,1,4) \in \mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) auf die Untervektorräume

$$\mathbb{R}(2,1,-1) \text{ und } \mathbb{R}(3,1,1)\,.$$

Berechnen Sie die Abstände von $(-2,1,4) \in \mathbb{R}^3$ zu diesen Geraden.

6) Erläutern Sie das *Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren* zur Berechnung einer Orthonormalbasis. Berechnen Sie damit Orthonormalbasen des von

$$(-2,3,2) \quad \text{und} \quad (1,3,-1)$$

bzw. von

$$(\frac{3}{5},0,0,\frac{4}{5}),\ (0,-2,-1,2) \quad \text{und} \quad (2,2,0,-1)$$

erzeugten Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ (mit dem Standardskalarprodukt). Berechnen Sie dann den Abstand von $(1,2,3)$ bzw. $(0,1,2,3)$ von diesem Untervektorraum.