Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

7. November 2016

1) Wann hat eine Matrix *Stufenform*? Welche der folgenden rationalen Matrizen haben Stufenform?

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&-3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&-1&0&3&0\\0&0&0&1&3&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

2) A sei eine rationale Matrix in Stufenform mit m Zeilen und n Spalten. Begründen Sie:
   - Das n-Tupel $(A_{-1},\ldots,A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^{m\times 1}$, wenn die letzte Zeile von A nicht nur Nullen enthält.
   - Das n-Tupel $(A_{-1},\ldots,A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann linear unabhängig, wenn in jeder Spalte ein Pivot steht.
   - Das n-Tupel $(A_{-1},\ldots,A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann eine Basis von $\mathbb{Q}^{m\times 1}$, wenn A die Einheitsmatrix ist.

3) A sei eine Matrix in Stufenform. Erläutern Sie, wie man eine Basis von $L(A,0)$ berechnet. Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix.
   Bestimmen Sie für alle Matrizen A in Aufgabe 1, die Stufenform haben, eine Basis (über $\mathbb{Q}$) von $L(A,0)$.

4) A sei eine Matrix in Stufenform und (A, b) ein System linearer Gleichungen. Wie entscheidet man, ob dieses System eine Lösung hat und - wenn ja - wie schreibt man eine solche an? Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob $L(A, b)$ bzw. $L(A, c)$ leer ist oder nicht. Wenn nicht, berechnen Sie irgendein Element davon und eine Basis des Vektorraums $L(A, 0)$. Wie kann man 100 Lösungen dieses Systems linearer Gleichungen anschreiben?

5) Schreiben Sie die folgenden drei Gleichungssysteme I, II, III in Matrizenform (A, b) an und entscheiden Sie, bei welchen davon die Matrix A Stufenform hat. Geben Sie für diese eine Lösung und eine Basis des Lösungsraums der entsprechenden homogenen Gleichung an.

$$(I) \quad x_1 + 3x_3 - 5x_4 = 1, x_2 - x_3 + x_4 = 2\,,$$
$$(II) \quad x_1 + 3x_2 = 1, x_3 - x_4 = 2\,,$$
$$(III) \quad x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 1, x_3 - x_4 + x_5 = 2\,, x_5 = -2\,.$$

Lösen Sie (ohne eine einzige Rechnung auszuführen) die Gleichungen

$$r + 33,56s = 21,45$$
$$a + 2,17b + 3,09c + 4,32d = 5,97$$

und

$$u - 3,34v + 9,33w - 11,67x = 1,01\,.$$

6) Was ist eine *Basis* eines Vektorraums? Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A_{11} + A_{22} = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist. Bestimmen Sie drei verschiedene Basen dieses Untervektorraums. Schreiben Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination jeder dieser drei Basen.