Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

31. Oktober 2016

1) Was ist ein *System linearer Gleichungen*? Was ist die *Lösungsmenge* eines solchen Systems und welche Eigenschaften hat diese?

   Zeigen Sie, dass die folgende Aufgabe als System linearer Gleichungen aufgefasst werden kann (Durch welche Matrix und welche Spalte ist dieses System linearer Gleichungen gegeben? Was ist gesucht? Sie brauchen das System aber nicht zu lösen.):

   Von einer Funktion $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ sind die Bilder von -3 und 2 bekannt: $f(-3) = 1$ und $f(2) = 0$. Wir nehmen an, dass die Funktion f eine Polynomfunktion vom Grad ≤ 2 *ist, das heißt: Es gibt rationale Zahlen a, b, c so, dass für alle rationalen Zahlen z das Bild $f(z)$ von z bezüglich f gleich $az^2 + bz + c$ ist. Gesucht sind alle solchen Tripel (a, b, c) (als Spalten geschrieben).*

2) Lösen Sie die folgenden Gleichungen (mit zwei Unbekannten), ohne dabei eine Rechenoperation auszuführen.
   a. 3,29 u+3,41w = 0
   b. 3,29 u+3,41w = 3,29
   c. -0,13x+2,56y = 0
   d. -0,13x+2,56y = 2,56
   e. 35,678x = 0
   f. y= 23,8708

3) Was ist ein *Vektorraum*? Was ist ein *Untervektorraum* eines Vektorraums? Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{Q}^{3\times3}$ (über $\mathbb{Q}$) aller rationalen 3×3-Matrizen?

$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times3} \mid A \text{ invertierbar } \} \ ,$$
$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times3} \mid A_{12} - A_{22} + A_{31} - A_{21} = 1\} \ ,$$
$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times3} \mid A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 = 0\} \ ,$$
$$\{sE_{13} + tE_{31} - 2uE_{33} \in \mathbb{Q}^{3\times3} \mid s, t, u \in \mathbb{Q}\} \ .$$

   (Die Matrizen E_{ij} sind Standardmatrizen).

4) Was ist eine *Linearkombination* von Vektoren? Schreiben Sie die Linearkombination

$$3\begin{pmatrix}1\\3\\2\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\0\\-3\\5\end{pmatrix}+\frac{4}{5}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

als Produkt einer Matrix mit einer Spalte. Schreiben Sie das Produkt

$$\begin{pmatrix}2,14 & -1,45\\3,75 & 4,21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5,41\\0,81\end{pmatrix}$$

einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der zwei Spalten der Matrix an.

Es seien n eine positive ganze Zahl, $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Spalten in $\mathbb{Q}^{n\times 1}$ und A eine rationale $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine rationale $n\times n$-Matrix B mit $A\cdot B = I_n$, wenn jede der Standard-Spalten $e_1, \ldots, e_n$ eine Linearkombination der Spalten $A_{-1}, \ldots, A_{-n}$ ist.

5) [Aus: Pauer, F., Scheirer-Weindorfer, M., Simon, A.: Mathematik 1. HTL. 2. Auflage, Österreichischer Bundesverlag, Wien 2013.]

Aufgabe 523. Gegeben sind die Spalten

$$a=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Berechne die Linearkombination.

A. $3a+2b+4c$ *B.* $5a-4b+c$

6) Was ist eine *Basis* eines Vektorraums? Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{Q}^3 \mid x+y+z=0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^3$ ist. Bestimmen Sie drei verschiedene Basen dieses Untervektorraums. Schreiben Sie $(1,-2,1)$ als Linearkombination jeder dieser drei Basen.