Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

30. Jänner 2017

1) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und A, B, C drei verschiedene Punkte in V, die nicht alle auf einer Geraden liegen.
Mit a bzw. b bzw. c bezeichnen wir die Gerade durch A bzw. B bzw. C, die normal zur Geraden durch die anderen zwei Punkte steht.
Zeigen Sie: $a \cap b \cap c$ enthält genau einen Punkt.
(„Die Höhenlinien eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkt").
Hinweis: Sie können annehmen, dass $A = 0$ ist und (B, C) eine Basis von V ist.

2) Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis? Was ist die *Transformationsmatrix* von einer Basis eines Vektorraums V zu einem q-Tupel von Vektoren in V? Wie kann man mit Hilfe dieser Transformationsmatrix entscheiden, ob dieses q-Tupel eine Basis von V ist?
Es sei $\underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass $\underline{u} := \underline{e}A$ und $\underline{w} := \underline{u}B$ Basen von $\mathbb{R}^2$ sind. Berechnen Sie die Koordinatenspalten von e_1, e_2 und $2e_1 + 3e_2$ bezüglich der Basen $\underline{u}$ und $\underline{w}$. Berechnen Sie die Koordinatenspalte von $u_1 + 2u_2$ bezüglich der Basis $\underline{w}$.

3) Erläutern Sie das in der Vorlesung angegebene Verfahren zur Berechnung von Determinanten. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -5 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$B := \begin{pmatrix} 555993 & 334567 & 345692 & 191919 \\ -3 & 5 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dann die Determinanten von

$$2A,\ A^2 \cdot B^2 \quad \text{und von} \quad -2B\,.$$

4) Wie kann man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix berechnen? Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Was ist eine *Eigenbasis* einer Matrix? Berechnen Sie - wenn möglich - eine Eigenbasis der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{bzw.} \quad M := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Falls N bzw. M eine Eigenbasis hat, sei $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix, deren Spalten die zwei berechneten Eigenbasisvektoren sind. Berechnen Sie dann $S^{-1}NS$ bzw. $T^{-1}MT$. Berechnen Sie die zweihunderttausendste Potenz der Matrizen M und N.

6) Was ist eine *komplexe Zahl*? Wie sind *Addition* und *Multiplikation* von komplexen Zahlen definiert? Berechnen Sie reelle Zahlen a, b, c, d so, dass

$$(3 - \frac{1}{5}i)^{-1} = a + bi$$

und

$$(\frac{1}{3} - 2i)(2 - \frac{1}{4}i) = c + di$$

ist. Berechnen Sie die Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und die entsprechenden Eigenräume ($\leq \mathbb{C}^{2\times 1}$) der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$