**Proseminar Lineare Algebra**

**WS 2016/17**

**16. Jänner 2017**

1) Was ist ein *Parallelotop*, was ist ein *Parallelogramm*? Wie ist das *Volumen eines Parallelotops* definiert?
Zeigen Sie: Wenn $n$ Vektoren in einem $n$-dimensionalen euklidischen Raum ganzzahlige Koordinaten bezüglich einer ON-Basis haben, dann ist auch das Volumen des von ihnen erzeugten Parallelotops eine ganze Zahl.
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von $(1, -10, 1)$ und $(\frac{1}{2}, 3, 2)$ erzeugten Parallelogramms und das Volumen des von $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ und $(1, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.

2) Was ist eine *Orientierung* eines reellen Vektorraums? Was ist ein *orientierter Vektorraum*? Wie ist das *Vektorprodukt* zweier Vektoren in einem dreidimensionalen orientierten euklidischen Raum definiert?
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der durch die Standardbasis gegebenen Orientierung als orientierten euklidischen Raum.
Es seien $v := (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $w := (3, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $v \times w$, $w \times v$, den Flächeninhalt des von $v$ und $w$ erzeugten Parallelogramms und den Abstand von $(1, 2, 4)$ zur Ebene, welche die Punkte 0, $v$ und $w$ enthält. Ergänzen Sie $(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1))$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Vektorprodukte

$$((2, 3, -1) \times (-1, 0, 3)) \times (-2, 1, 2)$$

und

$$(2, 3, -1) \times ((-1, 0, 3) \times (-2, 1, 2)).$$

3) Was ist eine *lineare Funktion*?
Eine Firma stellt drei Produkte A, B und C her. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ordnet jedem Tripel $(a, b, c)$ das Paar $(P(a, b, c), G(a, b, c))$ zu. Dabei ist $P(a, b, c)$ der Preis und $G(a, b, c)$ der Gewinn in Euro bei der Produktion von a Einheiten des

Produktes A, b Einheiten des Produktes B und c Einheiten des Produktes C.
Wir nehmen an, dass $f$ linear ist. Ist das sinnvoll?
Jemand weiß, dass

$$f((2,1,1)) = (70,21),\ f((1,3,1)) = (100,28),\ f((1,1,2)) = (90,28)$$

ist. Kann man daraus und aus der Annahme, dass $f$ linear ist, den Preis von je einer Einheit des Produktes A bzw. B bzw. C und den Gewinn der Firma beim Verkauf von je einer Einheit des Produktes A bzw. B bzw. C berechnen? Wenn ja, begründen Sie, warum.

4) Was ist eine *lineare Funktion*? Welche der folgenden Funktionen sind linear?

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2\,, a \mapsto a^2 + a\,, \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto (-z+3)^2 - z^2 - 9\,, \\ h &: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}\,, M \mapsto \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} M_{ij}\,, \\ j &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto 5z + 3\,, \\ k &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, (a,b) \mapsto (5a-b, 2a+3b)\,. \\ \ell &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, (m,n) \mapsto (m+n+1, m-2n)\,. \end{aligned}$$

5) Wie ist die *Matrix einer linearen Funktion* definiert? Was ist ein *Isomorphismus* von Vektorräumen? Es seien

$$\underline{v} := (v_1, v_2) := ((134, 398, -119), (73, 245, -371)) \in (\mathbb{R}^3)^2\ ,$$

$$\underline{w} := (w_1, w_2) := ((341, \frac{16}{37}, -147), (145, 19, 335)) \in (\mathbb{R}^3)^2\ ,$$

$V$ bzw. $W$ die von $\underline{v}$ bzw. $\underline{w}$ erzeugten Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ und $f : V \longrightarrow W$ die lineare Funktion mit $f(v_1) = w_1 - w_2$ und $f(v_2) = 2w_1 + w_2$. Berechnen Sie die Matrix von $f$ bezüglich der Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ ein Isomorphismus ist und berechnen Sie die Matrix ihrer Umkehrfunktion bezüglich der Basen $\underline{w}$ und $\underline{v}$.

Es sei $g$ die lineare Funktione von $W$ nach $V$ mit $g(w_1) = v_1 + 2v_2$ und $g(w_2) = 3v_1 - 2v_2$ Berechnen Sie die Matrix von $g \circ f$ bezüglich der Basis $\underline{v}$.

6) Was ist ein *Eigenvektor, Eigenwert, Eigenraum* einer linearen Funktion?
Für $i \in \mathbb{N}$ sei $x^i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, t \longmapsto t^i$, die „i-te Potenzfunktion“. Die Funktionen $x^0 =: 1, x, x^2, \ldots, x^n$ sind linear unabhängig. Mit $V$ bezeichnen wir den von $1, x, x^2, \ldots, x^n$ erzeugten Vektorraum („Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$“) und mit $D$ die Funktion von $V$ nach $V$ mit

$$D(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} i c_i x^{i-1}$$

(„Differentiation“). Berechnen Sie die Matrix von $D$ bezüglich der Basis $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ von $V$. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von $D$.